Die Quantifizierung von Marktrisiken in der Tierproduktion mittels Value-at-Risk und Extreme-Value-Theory

MARTIN ODENING und JAN HINRICHS

Quantification of Market Risk in Livestock Production Using Value-at-Risk and Extreme-Value-Theory

The objective of this paper is to investigate the performance of different Value-at-Risk (VaR) models in the context of risk assessment in hog production. The paper starts with a description of traditional VaR models, i.e. Variance-Covariance-Method (VCM) and Historical Simulation (HS). We address two well known problems, namely the fat tailedness of return distributions and the time aggregation of VaR forecasts. Afterwards, Extreme-Value-Theory (EVT) is introduced in order to overcome these problems. The previously described methods are then used to calculate the VaR of hog production under German market conditions. It turns out that EVT, VCM, and HS lead to different VaR forecasts if the return distributions are fat tailed and if the forecast horizon is long. Finally, we discuss the strengths and weaknesses of these rather new risk management methods thereby trying to identify fields for potential applications in the agribusiness.

Key words: Value-at-risk; extreme-value-theory; risk in hog production

Zusammenfassung

Die Zielsetzung des Beitrages besteht darin, verschiedene Schätzverfahren für das Risikomaß Value-at-Risk (VaR) am Beispiel der Schweineproduktion vergleichend gegenüber zu stellen. Einführend werden traditionelle VaR-Methoden, konkret die Varianz-Kovarianz-Methode (VKM) und die Historische Simulation (HS), vorgestellt. Dabei wird insbesondere auf Probleme eingegangen, die bei Vorliegen leptokurtischer Verteilungen sowie bei längerfristigen VaR-Prognosen auftreten können. Anschließend wird auf die Extreme-Value-Theory (EVT) zurückgegriffen, um die angesprochenen Probleme besser handhaben zu können. Die genannten Methoden werden dann herangezogen, um VaR-Prognosen für die Schweineproduktion, basierend auf deutschen Marktdaten, zu erstellen. Dabei werden die Unterschiede zwischen den verschiedenen Schätzverfahren deutlich, insbesondere bei längerfristigen Prognosen. Abschließend wird versucht, die Stärken und Schwächen dieser relativ neuen Instrumente des Risikomanagements verallgemeinernd darzustellen und sinnvolle Einsatzmöglichkeiten für agrarökonomische Anwendungen aufzuzeigen.

Schlüsselwörter: Value-at-Risk; Extreme-Value-Theory; Risiko in der Schweineproduktion

1 Einleitung

- Die BSE-Krise und die fast zeitgleich aufgetretene Maul- und Klauenseuche haben Ende 2000 zu erheblichen Turbulenzen auf den deutschen und europäischen Rinder- und Schweinemärkten geführt. Der drastische Preisverfall insbesondere auf dem Rindermarkt hat umfangreiche staatliche Aufkaufaktionen notwendig gemacht, um akute Liquiditätsprobleme der Produzenten abzuwenden. Diese Ereignisse in Verbindung mit der Einschätzung, dass durch die zu erwartende Deregulierung der Agrarmärkte in der Europäischen Union die Erzeugerpreisschwankungen tendenziell zunehmen werden, erwecken den Wunsch nach geeigneten Indikatoren zur Quantifizierung von Marktrisiken. Während die Analyse und die Steuerung von Produktionsrisiken im landwirtschaftlichen Bereich traditionell einen agrarökonomischen Forschungsschwerpunkt bildet, wurde der Quantifizierung und Prognose von Marktrisiken – zumindest aus einzelbetrieblicher Perspektive – bislang vergleichsweise wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Häufig stützen sich Risikobetrachtungen allein auf die Berechnung intuitiv gegriffener Worst-Case-Szenarien. Demgegenüber hat sich im Finanzbereich das Konzept des Value-at-Risk (VaR) als Standardverfahren zur Quantifizierung von Marktrisiken etabliert (JORION, 1997). Es liegen auch bereits Überlegungen zur Übertragung dieses Konzeptes auf den Nichtfinanzbereich vor (DIGGELMANN, 1999). BOEHLJE und LINS (1998) sowie MANFREDO und LEUTHOLD (1999) weisen speziell auf seine Anwendungsmöglichkeiten im Agribusiness hin. ODENING und MUSSHOFF (2002) kommen ebenfalls zu dem Schluss, dass sich VaR als Instrument des Risikomanagements im Agribusiness – wenngleich differenzierter als im Bankenbereich – verbreiten wird. Dafür sprechen folgende Gründe:

- VaR drückt den maximalen Vermögensverlust aus, den ein Portfolio innerhalb eines definierten Zeitraumes mit einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit in Folge von Marktpreisschwankungen erleiden kann. VaR erlaubt damit die Exposition gegenüber Marktrisiken in einer Kennzahl anschaulich zu komprimieren. Diese Information ist von unmittelbarem Interesse für Unternehmen, die über große Bestände landwirtschaftlicher Commodties verfügen, also beispielsweise Agrarhandelsunternehmen.

- Insbesondere aus Sicht von Unternehmen der landwirtschaftlichen Primärproduktion ist bedeutsam, dass auch die Risikoexposition anhand von Stromgrößen, wie zum Beispiel dem Cash Flow, ausgewiesen werden kann. Damit stellt das VaR-Konzept eine wichtige Ergänzung des ansonsten rein deterministischen Rechnungswesens dar (vgl. hierzu BAHRS, 2002). Eine entsprechende Anwendung für rindermästende Betriebe findet sich bei MANFREDO und LEUTHOLD (2001).

- VaR erlaubt nicht nur die Quantifizierung von Marktrisiken, sondern auch die Bewertung risikomindernder Maßnahmen. ODENING und MUSSHOFF (2002) zeigen am Beispiel der Schweinemast, wie sich die Risikoexposition durch Nutzung von Warenterminkontrakten beeinflussen lässt. VaR kann somit einen wesentlichen Beitrag zum Risikomanagement eines landwirtschaftlichen Unternehmens leisten.

- Der Aufbau eines effizienten Risikomanagementsystems, zu dem notwendigerweise auch die Quantifizierung von Marktrisiken gehört, ist nicht nur aus unternehmensinterer Sicht relevant, sondern richtet sich auch an externe Adressaten. Beispielhaft sei die (noch stärker) risikoorientierte Kreditvergabe angeführt, die im Gefolge des Basel-II-Akkords zu erwarten ist. Dabei ist auch die positive Signalwirkung zu sehen, die von einer standardisierten Ausweisung des „Downside Risk" durch (landwirtschaftliche) Unternehmen, z.B. mittels VaR, ausgeht.

Ungeachtet des angesprochenen Anwendungspotenzials treten bei der Anwendung von VaR eine Reihe von Spezifikationsfragen und methodischen Problemen auf, von denen einige in diesem Beitrag aufgezeigt werden sollen. Mit anderen Worten, es wird weniger das „ob" sondern vielmehr das „wie" einer Anwendung des VaR-Konzepts diskutiert. Der Fokus liegt – motiviert durch die einleitenden Bemerkungen zu extremen Ereignissen auf den europäischen Viehmärkten – auf der Frage, inwieweit die Prognose besonders ungünstiger Marktkonstellationen durch die Anwendung der sogenannten Extreme-Value-Theory (EVT) im Vergleich zu herkömmlichen Verfahren der VaR-Schätzung verbessert werden kann. Auf das Potenzial der EVT ist in diesem Zusammenhang in jüngster Zeit mehrfach hingewiesen worden (MCNEIL, 1998; DANIELSSON und DE VRIES, 2000; DIEBOLD et al., 1998). Eine weitere Zielsetzung des Beitrages besteht darin, die Schwierigkeiten herauszustellen, die aus einer mittel- bis langfristigen VaR-Prognose resultieren. Während sich der Prognosezeitraum im Finanzbereich meistens auf einen oder wenige Tag(e) beschränkt, dürfte dies im Agrarbereich selten der relevante Zeithorizont sein. Zwar liegt in Gestalt der sog. Square-Root-Regel ein einfach anzuwendendes Verfahren vor, um kurzfristige VaR-Prognosen für einen längeren Zeitraum fortzuschreiben, allerdings setzt diese Regel voraus, dass die betrachteten Zufallsgrößen im Zeitablauf identisch und unabhängig normalverteilt sind. Es wird sich zeigen, dass die beiden angesprochenen Problembereiche – die Berücksichtigung von „Fat Tails" und die zeitliche Aggregation kurzfristiger VaR-Prognosen – miteinander zusammenhängen.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt 2 werden neben einer Definition von VaR und einer kurzen Darstellung traditioneller Schätzverfahren einige Alternativen der Modellierung stochastischer Marktfaktoren diskutiert. Darüber hinaus wird in diesem Abschnitt das Problem einer zeitlichen Aggregation von VaR-Schätzern angesprochen. Abschnitt 3 stellt einige Grundlagen der Extreme-Value-Theorie dar und erläutert, wie dieses Konzept zur VaR-Schätzung herangezogen werden kann. In Abschnitt 4 wird die zuvor beschriebene Methodik eingesetzt, um das Marktrisiko in der Schweineproduktion für deutsche Marktverhältnisse zu quantifizieren. Dazu wird auf wöchentliche Preisdaten zwischen 1994 und 2001 zurückgegriffen. Der Beitrag endet mit Schlussfolgerungen für Methodenwahl und Spezifikation von VaR-Modellen im landwirtschaftlichen Kontext.

2 Value-at-Risk

2.1 Definition und traditionelle Verfahren

Wie bereits erwähnt, misst VaR das Downside Risk eines Portfolios. Sei *W* der Wert einer Vermögensposition und *V* die zufallsbehaftete Wertänderung dieses Vermögens innerhalb eines Zeitraumes $h = \Delta t = t_1 - t_0$, dann ist VaR wie folgt definiert:

(1) $$\text{VaR} = E(V) - V$$

mit *E(V)* dem Erwartungswert der Wertänderung und V^* derjenigen Wertänderung, für die gilt:

(2) $$\int_{-\infty}^{V^*} f(v)\,dv = \text{Prob}(V \le V^*) = p$$

Unter Verwendung der Definitionsgleichung $V = W_{t_0} \cdot X$ mit $X = ln(W_{t_1} / W_{t_0})$ lässt sich VaR auch als Funktion der kritischen Rendite X^* ausdrücken:

(3) $$\text{VaR} = W_{t_0}(E(X) - X^*)$$

wobei *E(X)* und X^* analog zu *E(V)* und V^* definiert sind. Aus (3) wird deutlich, dass die Berechnung von VaR dem Auffinden eines speziellen Quantils der Verteilung der Wertänderung, d.h. der Gewinne bzw. Verluste, gleichkommt. Man spricht auch von der „profit and loss distribution" (P&L distribution).

In der Literatur werden drei alternative Verfahren zur Berechnung von VaR genannt, die Varianz-Kovarianz-Methode, die Historische Simulation und die Monte-Carlo-Simulation. Die beiden erstgenannten Methoden sollen im Folgenden kurz angesprochen werden, da sie als Referenz in der Anwendung in Abschnitt 4 dienen. Ausführlichere Beschreibungen aller drei Verfahren finden sich bei JORION (1997) oder DOWD (1998).

Die Varianz-Kovarianz-Methode (VKM) bestimmt den VaR direkt als Funktion der Standardabweichung der Portfoliorendite σ. Unterstellt man für die Rendite eine Normalverteilung, so gilt:

(4) $$\text{VaR} = W_{t_0} \cdot c \cdot \sigma \cdot \sqrt{h}\,.$$

Dabei bezeichnet *c* das zu *p* gehörende Quantil der Standardnormalverteilung, und $\sqrt{h}$ passt den gewünschten Prognosezeitraum (Holding Period) an den Bezugszeitraum der Volatilität σ an[1]). Diese wird aus den Varianzen und Kovarianzen der verschiedenen Portfoliokomponenten und Marktfaktoren σ_{ij} berechnet:

(5) $$\sigma_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} \right)^{0,5}$$

Darin sind *w* die Gewichte der Portfoliobestandteile *i* und *j*. Ein wesentlicher Vorteil der VKM besteht in dem vergleichsweise geringen Rechenaufwand. Im Zusammenhang mit der Prognose extremer Ereignisse ist allerdings die oben angesprochene Normalverteilungsannahme kritisch zu sehen, die zu einer Unterschätzung des VaR führt.

Die Historische Simulation (HS) ist im Gegensatz zur VKM ein nichtparametrischer Ansatz, bei dem die unbekannte Profit-and-Loss-Distribution durch deren empirische Verteilungsfunktion geschätzt wird. M.a.W. es ist keine explizite Verteilungsannahme nötig, allerdings wird implizit

1) Auf die Probleme, die mit dieser Vorgehensweise verbunden sind, wird in Abschnitt 2.3 eingegangen.

von einer Verteilungskonstanz ausgegangen. Zur Ermittlung des VaR werden die in einem vorab zu definierenden Beobachtungszeitraum tatsächlich aufgetretenen T Wertänderungen des Vermögens der Größe nach geordnet und der $(T / p + 1)$ste Wert abgegriffen. Bei $T = 1000$ Beobachtungen und $p = 0.05$ wäre dies beispielsweise der 51st-größte Verlust. Als problematisch erweist sich, dass die empirische Verteilungsfunktion zwar um den Mittelwert relativ glatt verläuft, jedoch angesichts der geringen Anzahl von extremen Stichprobenwerten an den Rändern diskrete Sprünge aufweist. Je größer bzw. kleiner die gewünschte Wahrscheinlichkeit ist, umso unsicherer wird die Schätzung des zugehörigen Quantils, und entsprechend empfindlich reagiert sie auf Veränderungen des Datensamples. Über Ereignisse, die schlechter sind als das Stichprobenminimum kann per definitionem nichts ausgesagt werden. Möglichkeiten, diese Probleme zu umgehen, bietet die Extreme-Value-Theory, die in Abschnitt 3 beschrieben wird.

2.2 Modellierung der Ergebnisverteilungen

Soll ein parametrisches Verfahren zur VaR-Berechnung eingesetzt werden, stellt sich sofort die Frage, durch welche Verteilung empirisch beobachtbare Renditen adäquat abgebildet werden können. Eine Standardannahme stellt die Normalverteilung dar, deren Parameter, insbesondere die Varianz, als langfristiges oder gleitendes Mittel aus den Zeitreihen der relevanten Marktfaktoren geschätzt wird. In der Literatur besteht allerdings Einigkeit darüber, dass finanzwirtschaftliche Daten (Aktienkurse, Indices etc.) durch das Auftreten von Extremwerten charakterisiert sind, d.h., die empirischen Häufigkeitsverteilungen weisen „Fat Tails" auf (positiver Exzess, Leptokurtosis)[2]). Für die Modellierung des stochastischen Prozesses der Renditen können sich daraus zwei Konsequenzen ergeben (JORION 1997, S. 166 f.): Entweder man verwendet eine leptokurtische Verteilung, z.B. eine t- Verteilung, oder man greift auf ein Modell mit stochastischer Volatilität zurück oder man tut beides zugleich[3]). Für die Verwendung von Modellen mit stochastischer Volatilität spricht die Beobachtung von Volatilitätsclustern bei hochfrequenten (z.B. täglichen) Datenreihen. Damit wird der Wechsel von Phasen relativ geringer und relativ hoher Kursschwankungen beschrieben. Ein solches Verhalten lässt sich beispielsweise mit Hilfe von GARCH-Modellen abbilden, bei denen die aktuelle Varianz des stochastischen Prozesses von der Höhe der Varianz und des Störterms der Vorperiode abhängt. Das bedeutet, dass die Prognose der Volatiltät und damit auch des VaR nicht länger auf unbedingten, sondern auf bedingten Verteilungen basiert. YANG und BRORSEN (1992) zeigen, dass GARCH-Modelle nicht nur für finanzwirtschaftliche Anwendungen relevant, sondern auch für die Beschreibung der Entwicklung täglich gemessener Spotmarktpreise landwirtschaftlicher Produkte geeignet sind.

2.3 Long-Term-Value-at-Risk

Aus der Sicht landwirtschaftlicher Unternehmen besteht Bedarf, VaR-Prognosen zu erstellen, deren Horizont größer ist als das Messintervall der zugrunde liegenden Daten, etwa auf der Basis wöchentlicher Daten das VaR für drei oder sechs Monate zu bestimmen. Es existieren grundsätzlich zwei Möglichkeiten, VaR-Prognosen für eine längere „Holding-Period" zu erstellen: Entweder man misst die Wertveränderungen über den Zeitraum, den es zu prognostizieren gilt, d.h. man schätzt das VaR auf der Basis drei- oder sechsmonatiger Renditen, oder man rechnet eine kürzerfristige (z.B. wöchentliche) VaR-Schätzung auf den gewünschten Zeitraum hoch. Das erstgenannte Vorgehen ist unabhängig von der Renditeverteilung möglich; es weist allerdings den gravierenden Nachteil auf, dass sich die Zahl der Beobachtungen stark reduziert. Stehen beispielsweise wöchentliche Daten über einen Zeitraum von 10 Jahren zur Verfügung und soll ein Halbjahres-VaR berechnet werden, so kann sich die Schätzung nur auf 20 Beobachtungen stützen. Für die zweite Vorgehensweise, die Hochrechnung von VaR-Schätzungen (Time-Scaling, Time-Aggregation), wird häufig die Square-Root-Regel herangezogen[4]):

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{VaR}(h) = \mathrm{VaR}(1) \cdot \sqrt{h}$$

Darin ist VaR(1) das Ein-Perioden-VaR und VaR(h) entsprechend das h-Perioden-VaR. DIEBOLD et al. (1997) zeigen, dass eine fehlerfreie Umrechnung mittels (6) an verschiedene Bedingungen geknüpft ist. Erstens, darf sich die Struktur des betrachteten Portfolios im Zeitablauf natürlich nicht ändern. Zweitens, müssen die Renditen identisch und unabhängig verteilt sein (iid Annahme), und drittens, müssen sie normalverteilt sein. Unter diesen Voraussetzungen kommt die Eigenschaft der Selbstadditivität von Normalverteilungen zum Tragen.

Von der Strukturkonstanz des Portfolios soll im Weiteren ausgegangen werden. Die Auswirkung einer Verletzung der iid-Annahme haben DROST und NIJMAN (1993) für den Fall eines GARCH-Prozess gezeigt. Gegenüber der korrekten Zeitaggregation führt die fehlerhafte Verwendung von (6) zu einer Überschätzung der Volatilitätsschwankungen, d.h. eine daraus abgeleitete längerfristige VaR-Prognose würde im Wechsel über- und unterschätzt (vgl. DIEBOLD et al., 1997). Wie (6) zu modifizieren ist, falls die iid-Annahme erfüllt ist, jedoch keine Normalverteilung, sondern eine Fat-Tail-Distribution vorliegt, wird in Abschnitt 3.1 diskutiert.

3 Extreme-Value-Theory

Im vorherigen Abschnitt wurden traditionelle Verfahren zur VaR-Schätzung beschrieben. Bezüglich der Prognose sehr seltener Ereignisse wurden sowohl bei der VKM als auch bei der HS Nachteile deutlich. Einen Ansatz zur Verbesserung der Schätzgüte extremer Quantile bietet die Extreme-Value-Theorie (EVT)[5]). Sie stellt spezielle statistische Grundlagen für die Schätzung der Ränder von Wahrschein-

2) Eine mathematische Präzisierung dieses Begriffs erfolgt in Abschnitt 3.1.

3) Ein weiterer, pragmatischer Ansatz, der in diesem Zusammenhang als „Stress Testing" bezeichnet wird, besteht darin, die Wertentwicklung des betrachteten Portfolios für die extremste(n) Situation(en) zu bestimmen, die in der Vergangenheit aufgetreten ist(sind). Diese „Worst Case Analyse" wird ergänzend zur VaR-Berechnung durchgeführt. Dabei bleibt allerdings unklar, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein solches Extremszenario in der Zukunft wiederholt.

4) Die Square-Root-Regel findet beispielsweise auch in dem verbreiteten RiskMetrics-Modell der JP Morgan Investmentbank Anwendung.

5) EMBRECHTS et al. (1997, S. 364) beschreiben das Anliegen der EVT plakativ als „Mission Improbable: How to Predict the Unpredictable" LI (1999) verwendet alternativ zur EVT einen semiparametrischen Ansatz, der neben der Varianz auch Schiefe und Kurtosis der Renditeverteilung bei der VaR-Schätzung berücksichtigt.

lichkeitsverteilungen bereit. Einige grundlegende Konzepte sollen nachstehend kurz angesprochen werden. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei EMBRECHTS et al. (1997).

3.1 Grundlegende Konzepte

Zentrales Anliegen der EVT ist es, Aussagen über Stichprobenextrema (Maxima oder Minima) zu treffen. Genauer gesagt wird gefragt, gegen welche Verteilung Stichprobenextremwerte streben. Eine herausgehobene Stellung hat dabei die sog. Verallgemeinerte Extremwertverteilung (GEV). Mit Hilfe des Fisher-Tipplet-Theorems lässt sich zeigen, dass normalisierte Stichprobenmaxima für eine sehr große Zahl von Verteilungen mit zunehmendem Stichprobenumfang gegen die verallgemeinerte Extremwertverteilung konvergieren. Seien $X_1, X_2, \cdots, X_n$ iid Zufallsvariablen (ZV) aus einer unbekannten Verteilung *F*, und a_n und b_n geeignete Normalisierungskoeffizienten, dann gilt für die Stichprobenmaxima $M_n = max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$:

(7) $$p\,lim\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right) = H(x)$$

p lim meint den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$, und *H(x)* bezeichnet die GEV, die wie folgt definiert ist:

(8) $$H(x) = \begin{cases} exp\left(-(1+\xi x)^{-1/\xi}\right) & für \xi \neq 0 \\ exp\left(-e^{x}\right) & für \xi = 0 \end{cases}$$

Die GEV beinhaltet drei Extremwertverteilungen als Spezialfälle, die Frechet-Verteilung $(\xi > 0)$, die Weibull-Verteilung $(\xi < 0)$ und die Gumbel-Verteilung $(\xi = 0)$. Weiterhin lassen sich Verteilungen *F* in Abhängigkeit des Parameters ξ als fat tailed $(\xi > 0)$, thin tailed $(\xi = 0)$ und short tailed $(\xi < 0)$ klassifizieren. Im vorliegenden Kontext gilt die Aufmerksamkeit der erstgenannten Klasse, zu der beispielsweise die *t*-Verteilung und die Pareto-Verteilung, aber nicht die Normalverteilung gehören. EMBRECHTS et al. (1997, S. 131) zeigen, dass die Stichprobenmaxima einer Verteilung *F*, die „Fat Tails" aufweist, gegen die Frechet-Verteilung $\Phi(x) = \exp\left(x^{\alpha}\right)$ konvergiert, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

(9) $$1 - F(x) = x^{-1/\xi} L(x)$$

(9) entspricht der Forderung, dass der Rand der Verteilung *F* gemäß einer Potenzfunktion ausläuft. Darin ist *L(x)* eine langsam variierende Funktion, die häufig als Konstante gewählt wird, und $\alpha = 1/\xi$ ist der Tail-Index der Verteilung. Je kleiner α ist, umso größeres Gewicht haben die Ränder der Verteilung *F*. Für das weitere Vorgehen lässt sich schlussfolgern, dass sich Wahrscheinlichkeiten bzw. Quantile für den äußersten Rand einer nicht notwendigerweise bekannten Verteilung *F* mit „Fat Tails" bestimmen lassen, indem der Tail Index α auf geeignete Weise geschätzt wird. In Abschnitt 3.2 wird ein solches Schätzverfahren für α beschrieben.

Die Erkenntnisse der EVT haben auch Implikationen für das oben diskutierte Problem der Konversion kurzfristiger in längerfristige VaR-Prognosen. Angenommen, für eine Ein-Perioden-Rendite X gilt $P(|X| > x) = Cx^{-\alpha}$, dann folgt auf Grund der näherungsweise linearen Additivität der Ränder von Fat-Tail-Verteilungen (DANIELSSON und DE VRIES, 2000):

(10) $$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_h > x) = hCx^{-\alpha}$$

Das bedeutet, die Hochrechnung der Einperioden-VaR-Prognose für *h* Perioden erfolgt bei fat-tailed Renditen unter der iid-Annahme mittels:

(11) $$\mathrm{VaR}(h) = \mathrm{VaR}(1) \cdot h^{1/\alpha}$$

Weisen die Renditen endliche Varianzen auf, impliziert dies $\alpha > 2$ und somit einen kleineren Skalierungsfaktor als von der Square-Root-Regel postuliert (DANIELSSON et al., 1998). Somit ist die Square-Root-Regel nicht nur bei Verletzung der iid-Annahme zu hinterfragen, sondern gleichfalls, wenn die Verteilung der Renditen durch „Fat Tails" charakterisiert ist.

3.2 Schätzung des Tail-Index

Um den Rand der Fat-Tail-Verteilung *F(x)* aus empirischen Daten zu schätzen und Quantile dieser Verteilung zu bestimmen, kann auf verschiedene Schätzverfahren zurückgegriffen werden. Ein verbreitetes Verfahren ist der Hill-Estimator (DIEBOLD et al., 1998). Dazu sind die beobachteten Verluste *X* der Größe nach zu ordnen: $X_1 > X_2 > \cdots > X_k > \cdots X_n$. Der Tail-Index $\alpha = 1/\xi$ kann dann wie folgt geschätzt werden:

(12) $$\hat{\alpha}(k) = \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \ln X_i - \ln X_{k+1}\right)^{-1}$$

Die Funktion *L(x)* in (9) wird durch eine Konstante *C* approximiert. Deren Schätzer lautet (EMBRECHTS et al., 1997, S. 334):

(13) $$\hat{C}_k = \frac{k}{n} X_{k+1}^{\hat{\alpha}}$$

Daraus ergeben sich für den Rand der Verteilung *F(x)* und das *p*-Quantil x_p die Schätzer:

(14) $$\hat{F}(x) = p = \frac{k}{n}\left(\frac{X_{k+1}}{x}\right)^{\hat{\alpha}}, x > X_{k+1} \text{ bzw.}$$

(15) $$\hat{x}_p = F^{-1}(x) = X_{k+1}\left(\frac{k}{np}\right)^{\frac{1}{\hat{\alpha}}}$$

Von dem Hill-Estimator kann gezeigt werden, dass er konsistent und asymptotisch normalverteilt ist (DIEBOLD et al., 1998).

Die Durchführung der Schätzung setzt die Festlegung des Grenzwertes X_k bzw. die Anzahl der Stichprobenwerte k voraus, die in die Schätzung einbezogen werden. Unglücklicherweise kann das Schätzergebnis stark durch diese Wahl beeinflusst werden. Zudem besteht ein Trade-Off: Je mehr Daten man für die Schätzung des Tail-Index α verwendet, um so geringer wird die Varianz des Schätzers; allerdings erhöht sich gleichzeitig der Bias, denn die unterstellte Potenzfunktion (9) gilt eben nur für den Rand der Verteilung. Um dieses Problem zu lösen, entwickeln DANIELSSON et al. (2001) ein Bootstrap-Verfahren zur Bestimmung des Stichprobenanteils *k/n*. Eine Beschreibung dieses Verfahrens, das in Abschnitt 4 zur Anwendung kommt, erfolgt im Anhang.

Um auch Aussagen über Quantile treffen zu können, die im Innern der Verteilung und nicht in ihrem Extrembereich, d.h. links von X_{k+1} liegen, schlagen DANIELSSON und DE VRIES (2000) vor, den mittels Hill-Estimator geschätzten Randbereich der Verteilung F an der Stelle X_{k+1} mit der empirischen Verteilungsfunktion zu verknüpfen. Dadurch werden die jeweiligen Vorteile der EVT und der HS kombiniert.

4 Anwendung „Tierproduktion"

4.1 Modell und Daten

Im Folgenden wird das VaR-Konzept herangezogen, um das Marktrisiko in der Schweineproduktion für europäische Marktverhältnisse zu quantifizieren. Ziel ist die Bestimmung des VaR für einen Zeithorizont von 12 Wochen. Dabei werden drei Sichtweisen eingenommen: Erstens, die eines Ferkelproduzenten, zweitens, die eines Verbundbetriebes, der selbsterzeugte Ferkel mästet und drittens, die eines spezialisierten Schweinemästers, der Ferkel zukauft. Ferkel und Schweine werden nicht über Vertragsproduktion zu vorab definierten Preisen, sondern zu aktuellen Marktpreisen gekauft bzw. verkauft. Der Geldüberschuss (Veredlungsmarge) CF_t zu einem Zeitpunkt t bezogen auf ein Ferkel bzw. Schwein lautet

$$CF_t = a \cdot P_t - \sum_{i=1}^{K} b_i Z_t \qquad (16)$$

und kann dann wie ein Portfolio betrachtet werden, das sich aus einer Long-Position (dem Produktpreis P) und mehreren Short-Positionen (den Faktorpreisen Z_i) zusammensetzt. Damit lässt sich (5) unmittelbar übertragen, wobei die Portfoliogewichte a und b_i die Bedeutung von produktionstechnischen Koeffizienten (Schlachtgewicht, Futterverbrauch etc.) haben. Empirische Untersuchungen von ODENING und MUSSHOFF (2002) zeigen, dass das Marktrisiko in der Schweineproduktion fast ausschließlich durch die Ferkel- und Schweinepreise hervorgerufen wird. Andere Aufwandspositionen, wie z.B. Futterkosten, beeinflussen zwar das Niveau der Produktionsmarge, unterliegen in Deutschland aber nur geringen Schwankungen. Für die Berechnung des VaR spielen sie daher praktisch keine Rolle. Aus diesem Grund wird im Folgenden das VaR vereinfachend für drei Zeitreihen ausgewiesen: Für die Erzeugerpreise von Ferkeln (Sichtweise des Ferkelerzeugers), für die Erzeugerpreise für Schlachtschweine (Sichtweise des Verbundbetriebes) und die Differenz aus Erlösen und Ferkelpreisen (Sichtweise des spezialisierten Mastbetriebes), wobei ein Schlachtgewicht von 80 kg angenommen wird. Es ist hervorzuheben, dass es sich hier nicht um eine Anwendung des VaR-Konzeptes im engeren Sinne handelt, sondern vielmehr ein Cash-Flow-at-Risk (CFaR)[6]) berechnet wird (DOWD, 1998, S. 239 f.). Trotz der formalen Analogie ist auf Unterschiede in der Interpretation beider Größen hinzuweisen: Während VaR den Wertverlust einer Vermögensposition quantifiziert, bezieht sich CFaR auf eine Stromgröße, eben den Cash Flow. Der informatorische Wert des CFaR dürfte daher vor allem für eine risikoorientierte mittelfristige Finanzplanung gegeben sein. Dabei ist zu bedenken, dass der in der beschriebenen Weise ermittelte CFaR nur selten direkt als aussagefähiger Risikoindikator zu verwenden ist. Zum einen hängt die Beurteilung, ob ein Rückgang des Cash-Flows als kritisch anzusehen ist, von den bestehenden Zahlungsverpflichtungen des Unternehmens (insbesondere Kapitaldienst) und von Liquiditätsüberschüssen anderer Betriebszweigen ab. Zum anderen kann das Unternehmen in Phasen hoher Erzeugerpreise u.U. Liquidität anhäufen, von der es bei einem Einbruch des Cash Flows zehren kann. Daraus folgt, dass der von uns berechnete CFaR mit Ergebnissen des betrieblichen Rechnungswesens zusammengeführt werden muß, um zu relevanten betriebswirtschaftlichen Aussagen zu kommen.

Die Preiszeitreihen wurden von der Zentralen Markt und Preisberichtstelle Berlin (ZMP) zur Verfügung gestellt. Es handelt sich um wöchentliche Notierungen im Zeitraum von Januar 1994 bis Oktober 2001 für die fünf neuen Bundesländer. Die Ferkelpreise in Euro je kg Lebendgewicht beziehen sich auf Ringferkel von handelsüblicher Qualität. Bei den Schweinepreisen wurde ein gewichteter Durchschnittspreis in Euro je kg Schlachtgewicht über die Handelsklassen E bis P entsprechend der Marktanteile gebildet. Gegenstand der folgenden Analyse sind allerdings nicht die Preiszeitreihen selbst, sondern die wöchentlichen Veränderungen der Preise[7]).

4.2 Empirische Ergebnisse

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 2.2 ist zunächst zu klären, welche Verteilungen der Marktfaktoren der Berechnung des VaR zugrunde zu legen sind. Dabei geht es zum einen um die Frage „bedingt oder unbedingt" und zum anderen um die Entscheidung „fat tailed oder thin tailed". Ausschlaggebend für die Entscheidung zwischen bedingten und unbedingten Vorhersagen ist der angestrebte

6) Dessen ungeachtet wird bei der Diskussion der Ergebnisse im Folgenden weiter von VaR (im weiteren Sinne) gesprochen. Weiterhin ist anzumerken, dass es die Quantile der Ferkel- und Schweinepreisveränderungen nicht unmittelbar als CFaR zu interpretieren sind. Dazu müsste eine Multiplikation mit produktionstechnischen Kennziffern wie Stallkapazität, Umtrieb und Wurfgröße erfolgen. Da diese Koeffizienten betriebsspezifisch sind, wurde dieser Schritt in der nachfolgenden Ergebnisdarstellung unterlassen.

7) Üblicherweise werden in finanzwirtschaftlichen Anwendungen Renditen, gemessen als Differenzen logarithmierter Preise („log returns"), betrachtet (siehe (3)). Dies hat den Vorteil der Niveauunabhängigkeit, führt, aber zu Problemen, wenn negative Werte auftreten, wie dies z.B. bei der Veredlungsmarge der Fall sein kann.

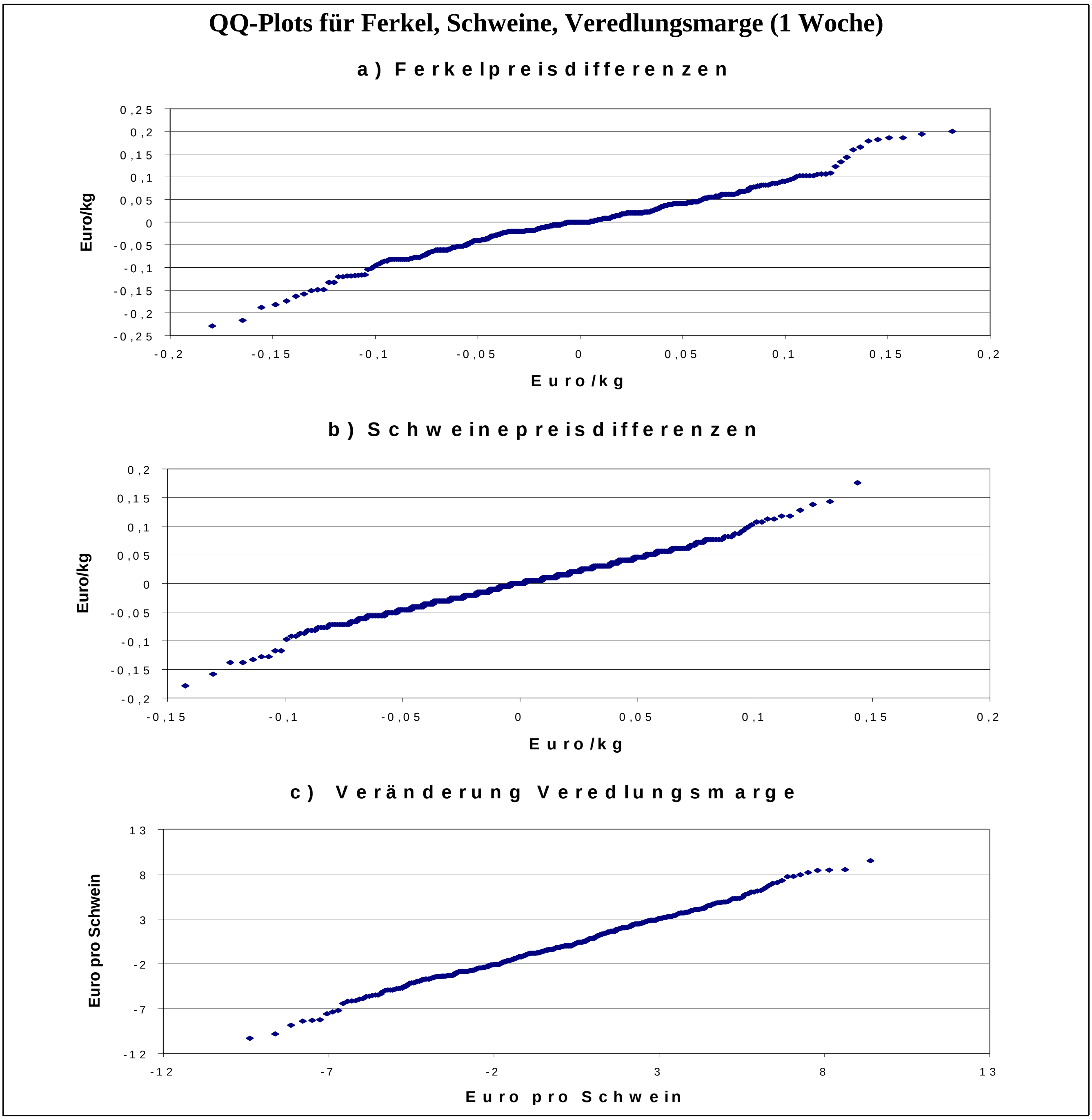

Abbildung 1

Prognosezeitraum. Während bedingte Modelle (z.B. GARCH-Modelle) für kurzfristige Prognosen überlegen sind, nimmt ihr Wert mit zunehmendem Zeithorizont ab. Die jüngere Vergangenheit der Datenreihe sagt wenig über die Wahrscheinlichkeit weit in der Zukunft liegender Ereignisse aus (CHRISTOFFERSON und DIEBOLD, 2000). Dies gilt insbesondere für die Prognose extremer Ereignisse, von denen angenommen werden kann, dass sie stochastisch unabhängig sind. Aus diesem Grund empfehlen DANIELSSON und DE VRIES (2000) Aussagen über extreme Ereignisse aus unbedingten Verteilungen abzuleiten. Wir folgen im Weiteren dieser Empfehlung[8]).

Es bleibt die Frage zu klären, ob die Differenzen der betrachteten Zeitreihen fat tailed sind oder nicht. Dieser Sachverhalt kann durch sog. QQ-Plots visualisiert werden, bei denen die Quantile der empirischen und einer theoretischen Verteilung gegenübergestellt werden. Liegen die Punkte annähernd auf einer Gerade, ist davon auszugehen, dass die beobachteten Daten der Referenzverteilung folgen. In der Abbildung 1 wurde die Normalverteilung als Referenzverteilung gewählt.

8) Die Adäquanz dieses Vorgehens kann mit Hilfe eines Lagrange-Multiplier-Tests überprüft werden (GREENE 2000, S. 798). Liegt bedingte Heteroskedastizität vor, so ist die iid-Annahme verletzt, auf der die EVT-Schätzung aufbaut. In diesem Fall stehen zwei Lösungsmöglichkeiten zur Verfügung. DIEBOLD et al. (1998) schlagen vor, für den Hill-Schätzer periodenbezogene (z.B. monatliche) Extremwerte zu verwenden, von denen anzunehmen ist, dass sie stochastisch unabhängig sind. Alternativ wählen MCNEIL und FREY (2000) ein zweistufiges Verfahren, das in einer ersten Stufe ein GARCH-Modell für die Varianzen schätzt und diese Schätzwerte zur Standardisierung verwendet. In einer zweiten Stufe wird EVT auf die standardisierten Daten angewendet, die dann die iid-Eigenschaft erfüllen.

Abbildung 1 lässt sich in der Weise deuten, dass die Veränderungen der Ferkelpreise und der Schweinepreise einen positiven Exzess aufweisen; für die Veredlungsmarge trifft diese Feststellung nicht eindeutig zu. Die Durchführung eines Kolmogorov-Smirnoff-Anpassungstests bestätigt den ersten visuellen Eindruck der QQ-Plots. Die Abweichung von der Normalverteilung ist bei den Veränderungen der Ferkelpreise am deutlichsten ausgeprägt. Die Annahme der Nullhypothese hinsichtlich Normalverteilung ist mit einem Signifikanzniveau von 5 % für alle drei Verteilungen abzulehnen. Bei den Veränderungen der Ferkelpreise überschreitet der Prüfquotient mit 0,086 auch den kritischen Wert von 0,081 für das 1 % Signifikanzniveau. Der Jarque-Bera-Test, der Abweichungen von der Normalverteilung in Bezug auf Schiefe und Wölbung zusammenfasst, bestätigt zusätzlich die Ablehnung dieser Verteilung für die drei betrachteten Zufallsvariablen. Der kritische Wert der Teststatistik beträgt auf dem 1 % Signifikanzniveau 9,2 und wird durch die entsprechenden empirischen Werte der Ferkelpreise (55,4), der Schweinepreise (55,1) und der Marge (23,5) überschritten. Die Testergebnisse stützen die Hypothese des Vorhandenseins von „Fat Tails“. Diesem Befund entsprechend soll im nächsten Schritt eine EVT-Schätzung durchgeführt werden.

Mit Blick auf die Veredlungsmarge, in die hier zwei stochastische Faktoren einfließen, stellt sich die Frage, wie die zur Schätzung univariater Verteilungen konzipierte EVT umzusetzen ist. Grundsätzlich bestehen zwei Vorgehensweisen zur Implementierung einer EVT-Schätzung für ein Portfolio, das Post Fitting und das Presampling (DANIELSSON & DE VRIES, 2000). Bei der eindimensionalen Methode des Post Fittings wird entsprechend der Vorgehensweise der HS, unter Berücksichtigung der Gewichtung der einzelnen Portfoliokomponenten, mit den historischen Preisreihen ein Portfolio gebildet. Anschließend werden die Tails der Verteilung dieser Zufallsvariablen geschätzt. Beim Presampling wird für jede in das Portfolio eingehende Komponente eine Tailschätzung durchgeführt und nach Erstellen einer Kovarianzmatrix das Portfolio mit den in den Tails modifizierten Verteilungen der Preisreihen gebildet. Diese mehrdimensionale Methodik hat gegenüber dem Postfitting den Nachteil eines immens steigenden Rechenaufwandes bei umfangreichen Portfolios. Das Post Fitting basiert auf der Annahme konstanter Korrelationen zwischen den einzelnen Portfoliokomponenten über die Zeit, die bei der Veredlungsmarge gegeben ist und somit hier angewandt wird.

Um das im Anhang beschriebene Bootstrap-Verfahren zur Bestimmung des Stichprobenanteils zur Tail-Index-Schätzung zu motivieren, werden zunächst am Beispiel der Schweinepreisdifferenzen die Ergebnisse des Hill-Estimators für verschiedene, willkürlich gewählte Werte von k in Abbildung 2 vorgestellt. Es ist offensichtlich, wie stark die Schätzergebnisse von der Zahl der in die Schätzung einbezogenen Extremwerte abhängen. Den in Abbildung 3 dargestellten Extremwertverteilungen liegt dagegen bereits die optimierte Anzahl von Extremwerten zugrunde. Sie beträgt für die Ferkelpreise 6, für die Schweinepreise 9 und für die Marge 3 Extremwerte. Zum Vergleich sind die mittels VKM und HS bestimmten empirischen Verteilungen abgebildet.

Die geschätzten Tail-Indices der Extremwertverteilungen für die Ein-Wochen-Differenzen der Ferkelpreise bzw. der Schweinepreise lauten 5,37 bzw. 4,08. Auf Grund der positiven Korrelation der Veränderung der Schlachtschweine- und Ferkelpreise sind die Schwankungen der Veredlungs-

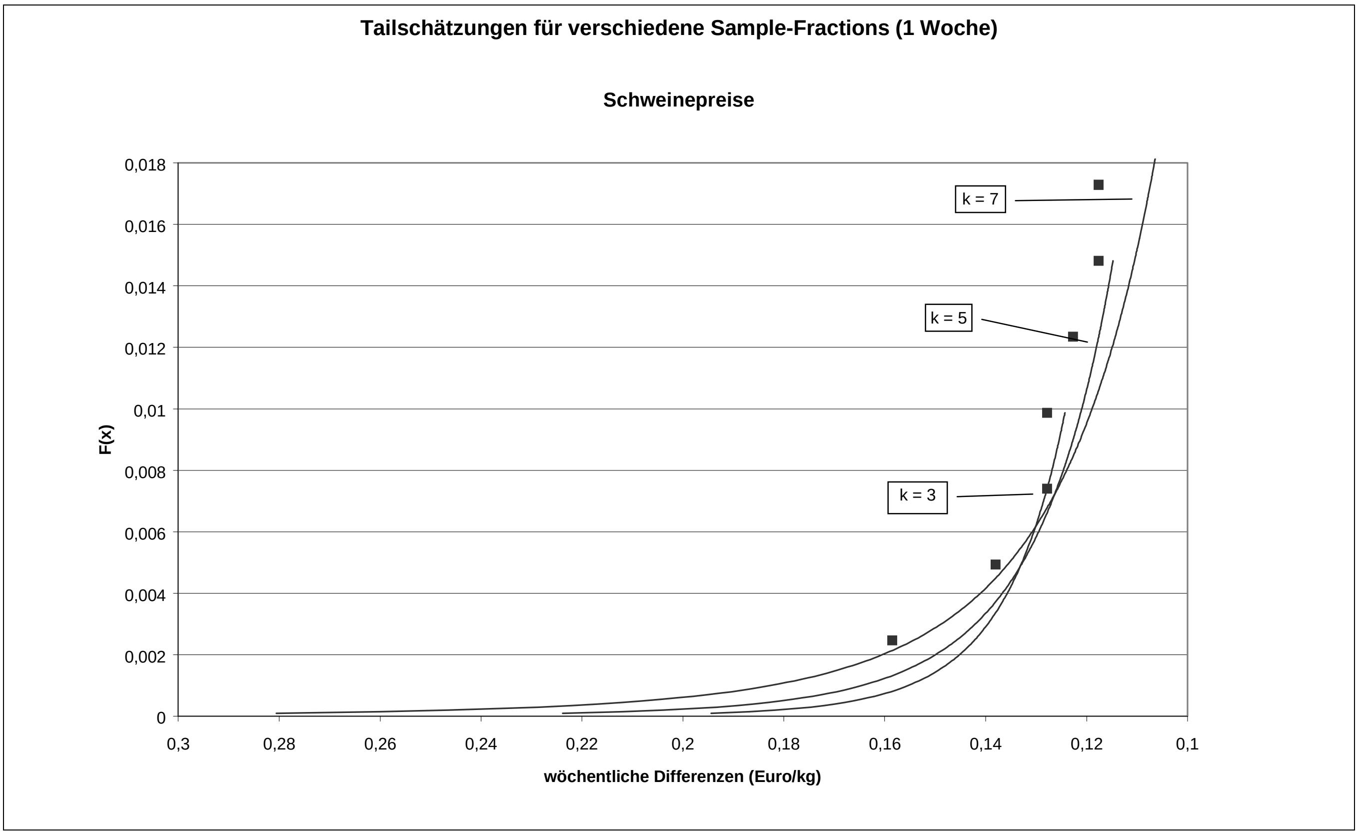

Abbildung 2

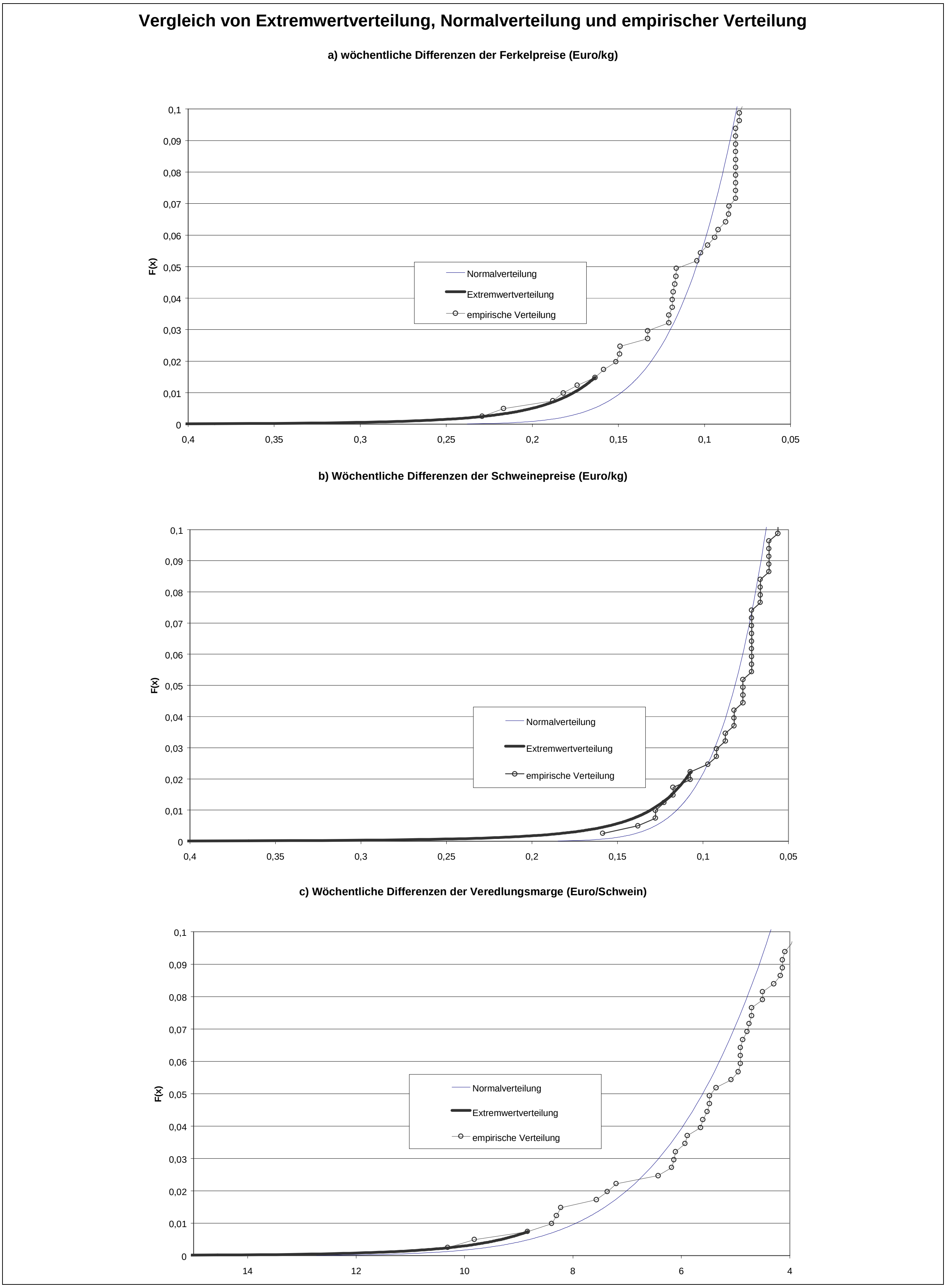
Vergleich von Extremwertverteilung, Normalverteilung und empirischer Verteilung
a) wöchentliche Differenzen der Ferkelpreise (Euro/kg)
F(x)
Normalverteilung
Extremwertverteilung
empirische Verteilung
b) Wöchentliche Differenzen der Schweinepreise (Euro/kg)
c) Wöchentliche Differenzen der Veredlungsmarge (Euro/Schwein)

Abbildung 3

marge weniger extrem als die der beiden Preisreihen selbst. Dies drückt sich in einem vergleichsweise großen Tail-Index von 7,23 aus und steht in Einklang mit den QQ-Plots und den Ergebnissen der Tests auf Normalverteilung, die für die Marge eine geringere Ausprägung von „Fat-Tails“ angedeutet haben.

Um das angestrebte Ziel – die Bestimmung des 12-Wochen-VaRs – zu erreichen, werden die aus Abbildung 3 abzuleitenden Ein-Wochen-VaRs hochgerechnet. Für die mittels HS und VKM berechneten VaRs geschieht dies mit der Square-Root-Regel, d.h. durch Multiplikation mit dem Faktor 3,464. Die zu der Extremwertverteilung gehörigen Quantile werden dagegen mit der Alpha-Root-Regel, d.h. unter Verwendung des jeweiligen Tail-Indexes α, hochgerechnet. Die Tabelle enthält die so ermittelten VaRs für verschiedene Konfidenzniveaus. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden in der Tabelle für die EVT-Schätzung auch für das Konfidenzniveau von 95 % die Werte der Extremwertfunktion ausgewiesen, obwohl diese bereits „rechts“ von dem durch das Bootstrap-Verfahren bestimmten Grenzwertes X_{k+1} liegen und entsprechend dem o.a. Vorschlag von DANIELSSON und DE VRIES (2000) schon die Werte der HS verwendet werden sollten.

Tabelle: **Ein- und 12-Wochen-VaRs für die drei Zeitreihen und für verschiedene Konfidenzniveaus** (95 %, 99 %, 99,9 %)

Konfidenzniveau %	Ferkelpreis 95,0	99,0	99,9	Schweinepreis 95,0	99,0	99,9	Marge 95,0	99,0	99,9
EVT		Euro			Euro			Euro	
1 Woche	0,130	0,176	0,270	0,088	0,131	0,230	6,786	8,476	11,653
SE	0,012	0,005	0,085	0,006	0,009	0,058	1,034	0,203	1,862
12 Wochen	0,207	0,280	0,429	0,162	0,240	0,422	9,567	11,950	16,429
HS									
1 Woche	0,104	0,182	-	0,077	0,128	-	5,358	8,303	-
SE	0,439	1,001	-	0,877	0,995	-	0,366	0,501	-
12 Wochen	0,361	0,631	-	0,266	0,443	-	18,562	28,764	-
VKM									
1 Woche	0,105	0,148	0,197	0,081	0,115	0,153	5,607	7,947	10,571
SE	0,004	0,005	0,007	0,003	0,004	0,005	0,199	0,281	0,373
12 Wochen	0,362	0,514	0,684	0,282	0,400	0,532	19,422	27,531	36,620

Im Vergleich zur EVT weist die VKM für eine kurzfristige Ein-Wochen-Prognose eine Unterschätzung auf. Das Ein-Wochen-VaR der VKM für die Ferkelpreise (Schweinepreise bzw. Marge) ist beispielsweise auf dem 99,9 % Niveau mit 0,197 Euro (0,153 Euro bzw. 10,571 Euro), bei einem durchschnittlichen Preis von 1,938 Euro (1,399 Euro bzw. 73,192 Euro) geringer als das der EVT mit 0,27 Euro (0,230 Euro bzw. 11,653 Euro). Bezogen auf den Schätzwert der VKM beträgt diese Differenz 18,9 % (13,3 % und 6,7 %), bezogen auf den Ferkelpreis (Schweinepreis bzw. Veredlungsmarge) dagegen nur 1,4 % (1,1 % bzw. 5,0 %). Die Unterschätzung des VaR durch die VKM nimmt mit einem steigenden Konfidenzniveau zu.

Der Vergleich von HS und EVT zeigt für eine Wahrscheinlichkeit von 99 % nur geringe Unterschiede, d.h. Verteilungsfunktionen der EVT und der HS schneiden sich in diesem Bereich (siehe Abb. 3). Für die Ferkelpreise ist das VaR der HS mit 0,182 Euro sogar höher als das der EVT mit 0,176 Euro. Für das 99,9 % Niveau können die Quantile mit HS nicht bestimmt werden, da sie außerhalb der in den Preiszeitreihen enthaltenen extremen Preisschwankungen liegen. Dieser eingangs angesprochene Nachteil der HS wird hier offenkundig.

Im Gegensatz zur tendenziellen Unterschätzung beim Ein-Wochen-VaR, ist mittelfristig eine Überschätzung der VaRs bei der HS und der VKM im Vergleich zur EVT zu beobachten. Das mittels EVT bestimmte 95-Prozent-Quantil für die Ferkelpreise (Schweinepreise bzw. Marge) ist mit 0,207 Euro (0,162 Euro bzw. 9,567 Euro) geringer gegenüber der VKM mit 0,362 Euro (0,282 Euro bzw. 19,422 Euro), als auch der HS mit 0,361 Euro (0,266 Euro bzw. 18,562 Euro). Die kurzfristige Unterschätzung des VaRs durch die HS und die VKM wird, abhängig von der Länge des Prognosehorizonts, durch eine zu konservative Hochrechnung mit der Square-Root-Regel überkompensiert.

In Bezug auf den (asymptotischen) Standardfehler (SE) der verschiedenen Schätzer ist Folgendes festzustellen[9]: Die VKM weist in der Tabelle scheinbar den geringsten Schätzfehler auf. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Annahme der Normalverteilung als Bedingung für die hier vorgenommene Berechnung des SE der VKM nicht erfüllt ist. Der bereits angesprochene Nachteil der HS, der in relativ großen Schätzfehlern besteht, zeigt sich bei dem hier vorliegenden Stichprobenumfang von 405 Beobachtungen deutlich. Die EVT stellt diesbezüglich eine bessere Alternative dar.

Üblicherweise schließt sich an die VaR-Schätzung eine Validierung der Ergebnisse an. Dies geschieht meist in Form einer Quasi-Exante Prognose (Backtesting, Out-of-Sample-Prediction). Dazu wird der Beobachtungszeitraum in einen Schätzzeitraum und in einen Prognosezeitraum unterteilt. Durch Vergleich der theoretisch erwarteten und der tatsächlich beobachteten VaR-Überschreitungen im Prognosezeitraum kann die Plausibilität der verschiedenen Modelle getestet werden. Eine solche Validierung ist auf Grund des relativ kurzen Beobachtungszeitraums der Preisreihen in dieser Anwendung nicht möglich. So würde beispielsweise die Überschreitung eines 99 %-VaR nur einmal während 100 Perioden auftreten; im vorliegenden Fall wären dies 100·12 Wochen, also alle 23 Jahre. Dies stellt eine grundsätzliche Schwierigkeit dar, wenn der traditionell kurzfristige Prognosehorizont des VaR-Konzeptes deutlich erweitert werden soll. Die Problematik wird dadurch verschärft, dass die EVT-Schätzung sehr datenaufwändig ist, so dass eine Validierung hier besonders schwer fällt.

5 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

Die in diesem Beitrag vorgenommene exemplarische Anwendung verdeutlicht zunächst, dass das Konzept der EVT

9) Der asymptotische Standardfehler für die VKM lautet: $SE(\hat{x}_p) = \sigma(2n)^{-1/2} c_p$ mit $\hat{x}_p$ dem geschätzten p-Quantil und c_p dem p-Quantil der Standardnormalverteilung. Die Standardfehler für die HS wurden nach JORION (1998, S. 99) und die der EVT nach DANIELSSON und DE VRIES (1997, S. 20) berechnet.

grundsätzlich auf Problemstellungen im Agribusiness übertragbar ist, was im Grunde nicht überrascht. Es gilt nun zu bewerten, ob und wann eine solche Übertragung sinnvoll und notwendig erscheint. Dazu sind der zusätzliche Aufwand und der zusätzliche Informationsgewinn im Vergleich zu konventionellen Verfahren der VaR-Schätzung einander gegenüberzustellen. In Bezug auf den Rechenaufwand ist festzuhalten, dass dieser im Vergleich zur Varianz-Kovarianz-Methode oder zur Historischen Simulation zunimmt. Dies liegt weniger an der Tail-Schätzung selber als vielmehr an dem Bootstrap-Verfahren zur Bestimmung des Stichprobenanteils, das sich als notwendig für die Schätzung erwiesen hat. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass die Häufigkeit, mit der diese Schätzung durchgeführt wird, deutlich geringer sein dürfte als bei kurzfristigen finanzwirtschaftlichen Anwendungen, die auf sich verschiebenden Zeitfenstern basieren und bei denen neue Preisinformationen ein permanentes Updaten der VaR-Prognosen erfordern.

Im Hinblick auf den Informationsgewinn durch Anwendung der EVT waren in der vorliegenden Untersuchung drei Punkte zu erkennen:

1. Bei kurzfristiger Betrachtung wird das VaR im Fall leptokurtischer Verteilungen für extreme Wahrscheinlichkeiten insbesondere durch die Varianz-Kovarianz-Methode unterschätzt.
2. Bei mittelfristiger Betrachtung fällt der Unterschied zwischen Square-Root-Regel und Alpha-Root-Regel besonders ins Gewicht und überwiegt den erstgenannten Effekt.
3. Gegenüber der Historischen Simulation kann die Schätzgenauigkeit (gemessen als Standardfehler) erhöht werden.

Die Belastbarkeit der ersten beiden Aussagen wird allerdings dadurch gemindert, dass wir unsere Ergebnisse nicht durch eine Quasi-Exante-Prognose absichern können.

Um den Nutzen einer EVT-gestützten VaR-Prognose würdigen zu können, ist weiterhin nach der Notwendigkeit der Prognose extremer Ereignisse zu fragen, denn dort (und nur dort) liegen deren Vorzüge. Während in Finanzinstituten auf Grund des Basel-Akkords eine unmittelbare Verknüpfung zwischen VaR und der erforderlichen Mindesteigenkapitalausstattung hergestellt wird, sind derartige Implikationen für Unternehmen des Agribusiness nicht gegeben. Die Motivation liegt hier in der Identifikation von Situationen, die ruinöse Auswirkungen auf das Unternehmen haben können und in der Ableitung geeigneter Gegenmaßnahmen. In diesem Zusammenhang ist noch einmal auf den bereits angesprochenen Unterschied zwischen VaR und CFaR hinzuweisen. Um von einem hohen CFaR auf eine finanzielle Gefährdung des Unternehmens schließen zu können, muss – wie bereits erwähnt- zum einen das Ausgangsniveau berücksichtigt werden und zum anderen bekannt sein, wie lange der Cash Flow auf dem ausgewiesenen niedrigen Niveau verharrt. Die Erfahrung zeigt, dass Ferkelerzeuger und Schweinemäster durchaus operative Verluste verkraften können, sofern diese Phase nicht zu lange andauert und vorher oder anschließend durch entsprechende Gewinne kompensiert wird. Die Einbeziehung dieser Informationen dürfte wesentlicher sein, als der Übergang von einem 99 %-Quantil zu einem 99,9 %-Quantil. Ein weiterer Einwand, der sich allerdings eher gegen VaR im Allgemeinen als gegen dessen Schätzung mittels EVT richtet, ist die Beschränkung auf Marktrisiken. Qualitätsrisiken oder Risiken, die von MKS oder BSE für einen individuellen Produzenten ausgehen können, sind produktionstechnischer Natur und drücken sich nicht allein in aggregierten Marktpreisen aus.

Damit lässt sich folgendes Fazit ziehen: Ob eine Ausweisung extremer Quantile notwendig erscheint, hängt von der Anwendungssituation ab. Hier unterscheidet sich die Sichtweise eines Schweinemästers oder Ferkelproduzenten von der eines Traders, der mit Terminkontrakten auf Schweine handelt oder von der eines Versicherungsunternehmens, das Tierseuchen versichert. *Wenn* eine Ausweisung extremer Quantile (z.B. 99 % oder höher) wünschenswert erscheint, dann sollten diese im Fall leptokurtischer Verteilungen ergänzend mit EVT geschätzt werden. Der zusätzliche Rechenaufwand wird durch die höhere Schätzgenauigkeit im äußeren Rand der Verteilung sowie durch markante Unterschiede bei der zeitlichen Aggregation der VaR-Prognosen gerechtfertigt.

Anhang: Beschreibung des Bootstrap-Verfahrens zur Bestimmung des optimalen Stichprobenanteils für die Tail-Index-Schätzung

Bei dem Bootstrap-Ansatz handelt es sich um ein mehrstufiges Verfahren, bei dem die einzelnen Schritte bis zum Auffinden des optimalen Stichprobenanteils *k/n* wiederholt zu durchlaufen sind. Mit *k* wird die Anzahl der Extremwerte bezeichnet, welche den gewählten Schwellenwert X_k überschreiten und die Datengrundlage für die Berechnung des Tail-Index bilden.

In der ersten Stufe werden *l* Wiederholungsstichproben $N^*_{n_1} = \{X^*_1, ..., X^*_{n_1}\}$ mit einem gegebenen Umfang $n_1<n$ aus der Gesamtmenge der Daten $N_n = \{X_1, \ldots, X_n\}$ mit Zurücklegen gezogen und für ein k_1 der asymptotische mittlere quadratische Schätzfehler (AMSE) $Q(n_1, k_1)$ wie folgt geschätzt:

$$\text{(A1)} \qquad Q(n_1, k_1) = E\left[\left(M^*_{n_1}(k_1) - 2\left(\xi^*_{n_1}(k_1)\right)^2\right)^2 \middle| N_n\right]$$

mit (A2) $M^*_{n_1}(k_1) = \frac{1}{k_1}\sum_{i=1}^{k_1}\left(\ln X^*_{n_1,i} - \ln X^*_{n_1,k_1+1}\right)^2$ und

$$\text{(A3)} \qquad \xi^*_{n_1}(k_1) = \frac{1}{k_1}\sum_{i=1}^{k_1} \ln X^*_{n_1,i} - \ln X^*_{n_1,k_1+1}$$

$k^*_{1,0}(n_1)$ bezeichnet denjenigen Wert k_1, der den AMSE (A1) minimiert:

$$\text{(A4)} \qquad k^*_{1,0}(n_1) = \mathit{argmin}\, Q(n_1, k_1)$$

Anschließend wird in einem zweiten Schritt $k^{*}_{2,0}(n_2)$ ganz analog mit einem kleineren Stichprobenumfang $n_2 = {(n_1)^2}/{n}$ bestimmt.

In einem dritten Schritt wird $\hat{k}_0(n)$ berechnet:

(A5)

$$\hat{k}_0(n) = \frac{\left(k^{*}_{1,0}(n_1)\right)^2}{k^{*}_{2,0}(n_2)} \left(\frac{\left(\ln k^{*}_{1,0}(n_1)\right)^2}{\left(2\ln n_1 - \ln k^{*}_{1,0}(n_1)\right)^2} \right)^{\frac{\ln n_1 - \ln k^{*}_{1,0}(n_1)}{\ln n_1}}$$

Im darauf folgenden vierten Schritt kann ξ mittels $\xi_n\left(\hat{k}_0\right)$ geschätzt werden:

(A6) $$\xi_n\left(\hat{k}_0\right) = \frac{1}{\hat{k}_0} \sum_{i=1}^{\hat{k}_0} \ln X^{*}_{n_1,i} - \ln X^{*}_{n_1,\hat{k}_0+1}$$

Die beschriebene Schätzung von k hängt von zwei Parametern ab, der Anzahl der Bootstrap-Wiederholungsstichproben l, sowie dem Stichprobenumfang n_1. Die Zahl der Wiederholungen wird im Wesentlichen durch die zur Verfügung stehenden Rechenkapazitäten limitiert. In der in Abschnitt 4 beschriebenen Anwendung wird mit 10000 Wiederholungen gerechnet, was zu sehr stabilen Ergebnissen führt. Die zu Beginn willkürlich getroffene Wahl des Umfangs n_1 kann dagegen in einem weiteren, fünften Schritt optimiert werden. Dazu ist der Quotient

(A7) $$R(n_1) = \frac{\left(Q(n_1, k^{*}_{1,0})\right)^2}{Q(n_2, k^{*}_{2,0})}$$

zu berechnen und bezüglich n_1 numerisch zu minimieren. Stimmt $n_1^{*} = argmin\, R(n_1)$ nicht mit dem im ersten Schritt gewählten Stichprobenumfang n_1 überein, müssen die Schritte 1 – 4 nochmals durchlaufen werden.

Literaturverzeichnis

BAHRS, E. (2002): Methoden des Rechnungswesens als Instrumente des Risikomanagements in der Landwirtschaft. In: BROCKMEIER, M. et al. (Hrsg.): Liberalisierung des Weltagrarhandels – Strategien und Konsequenzen. Schriften der Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaus, Band 37, S. 255–264.

BOEHLJE, M. D., LINS, D.A. (1998): Risks and Risk Management in an Industrialized Agriculture. In: Agricultural Finanance Review 58, S. 1–16.

CHRISTOFFERSEN, P. F., DIEBOLD, F. X. (2000): How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management? Review of Economics and Statistics 82: 1–11.

DANIELSSON, J., DE VRIES, C. G. (1997): Beyond the Sample: Extreme Quantile and Probability Estimation. Working Paper, London School of Economics University of Iceland.

DANIELSSON, J., DE VRIES, C. G. (2000): Value-at-Risk and Extreme Returns. Annals d'Economie et de Statistique 60: 239–269.

DANIELSSON, J., HARTMANN, P., DE VRIES, C. G. (1998): The Cost of Conservatism. Risk 11: 101–103.

DANIELSSON, J., DE HAAN, L., PENG, L., DE VRIES, C. G. (2001): Using a Bootstrap Method to Choose the Sample Fraction in Tail Index Estimation. Journal of Multivariate Analysis 76: 226–248.

DIEBOLD, F. X. HICKMAN, A., INOUE, A., SCHUERMANN, T. (1997): Converting 1-Day Volatility to h-Day Volatility: Scaling by Root-h is Worse than You Think. Wharton Financial Institutions Center, Working Paper 97–34.

DIEBOLD, F. X., SCHUERMAN, T., STROUGHAIR, J. D. (1998): Pitfalls and Opportunities in the Use of Extreme Value Theory in Risk Management. Working Paper 98–10, The Wharton School, University of Pennsylvania.

DIGGELMANN, P. B. (1999): Value at Risk. Kritische Betrachtung des Konzepts; Möglichkeiten der Übertragung auf den Nichtfinanzbereich. Versus, Zürich.

DOWD, K. (1998): Beyond Value at Risk. Wiley, Chicester u.a.

DROST, F. C., NIJMAN, T. E. (1993): Temporal Aggregation of GARCH Processes. Econometrica, 61, 909–927.

EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T. (1997): Modeling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin.

GREENE, W. H. (2000): Econometric Analysis, Fourth Edition. Prentice-Hall, New Jersey.

JORION, P. (1997): Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Market Risk. McGraw-Hill, New York.

LI, D. X. (1999): Value at Risk based on the Volatility, Skewness and Kurtosis. Working Paper, Riskmetrics Group, New York.

MANFREDO, M. R., LEUTHOLD, R. M. (1999): Agricultural Applications of Value-at-Risk: A Perspective. OFOR Paper no. 98–04. University of Illinois at Urbana-Champaign.

MANFREDO, M. R., LEUTHOLD, R. M. (2001): Market Risk Measurement and the Cattle Feeding Margin: An Application of Value-at-Risk. In: Agribusiness 17, S. 333–353.

MCNEIL, A., J. (1998): Calculating Quantile Risk Measures for Financial Return Series using Extreme Value Theory. Working Paper, Department Mathematik, ETH Zürich.

MCNEIL, A. J., FREY, R. (2000): Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach. Journal of Empirical Finance 7: 271–300.

ODENING, M., MUSSHOFF, O. (2002): Value-at-Risk – ein nützliches Instrument des Risikomanagements in Agrarbetrieben? In: BROCKMEIER, M. et al. (Hrsg.): Liberalisierung des Weltagrarhandels – Strategien und Konsequenzen. Schriften der Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaues, Band 37, S. 243–253

WINSTON, W. (1998): Financial Models using Simulation and Optimization. Palisade, New York.

YANG, S. R., BRORSEN, B. W. (1992): Nonlinear Dynamics of Daily Cash Prices. American Journal of Agricultural Economics 74: 706–715.

Verfasser:

Prof. Dr. MARTIN ODENING und

Dipl.-Ing. agr. JAN HINRICHS,

Institut für Wirtschaft- und Sozialwissenschaften des Landbaus, Humboldt-Universität zu Berlin, Luisenstraße 56, D-10099 Berlin, Tel. +(49)-30-2093 6487, Fax +(49)-30-2093 6465 (E-Mail: m.odening@agrar.hu-berlin.de)