



AgEcon SEARCH
RESEARCH IN AGRICULTURAL & APPLIED ECONOMICS

The World's Largest Open Access Agricultural & Applied Economics Digital Library

This document is discoverable and free to researchers across the globe due to the work of AgEcon Search.

Help ensure our sustainability.

Give to AgEcon Search

AgEcon Search

<http://ageconsearch.umn.edu>

aesearch@umn.edu

*Papers downloaded from **AgEcon Search** may be used for non-commercial purposes and personal study only. No other use, including posting to another Internet site, is permitted without permission from the copyright owner (not AgEcon Search), or as allowed under the provisions of Fair Use, U.S. Copyright Act, Title 17 U.S.C.*

No endorsement of AgEcon Search or its fundraising activities by the author(s) of the following work or their employer(s) is intended or implied.

GOSPODARKA NARODOWA

3
(271)
Rok LXXXIV/XXV
maj–czerwiec
2014
s. 5–34

Katarzyna MROCZEK*
Tomasz TOKARSKI**
Mariusz TROJAK***

Grawitacyjny model zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw

Streszczenie: Celem artykułu jest wyjaśnienie wpływu tzw. efektu grawitacyjnego na przestrzenne zróżnicowanie rozwoju ekonomicznego polskich województw. Ów efekt grawitacyjny (nawiązując do prawa grawitacji Newtona) opiera się na założeniu, że regiony oddziałują na siebie gospodarczo, przy czym siła oddziaływania jest proporcjonalna do ich wielkości i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi. Najczęściej modele grawitacyjne były wykorzystywane do opisu zjawisk w handlu światowym, zaś ich zastosowanie do analizy wzrostu i zróżnicowania regionalnego było bardzo rzadkie. Zastosowany w opracowaniu model nawiązuje do neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa, modeli Mankiwa, Romera i Weila oraz Nonnemana i Vanhoudta. W opracowaniu zaprezentowano model wzrostu gospodarczego uwzględniający efekt grawitacji. Wykazano, że model ten posiada nietrywialny punkt stacjonarny oraz że jest on asymptotycznie stabilny, co oznacza, że jest punktem asymptotycznej długookresowej równowagi rozważanego modelu wzrostu gospodarczego. W dalszej części opracowania dokonano opisowej analizy zróżnicowania technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy, jednostkowych i łącznych efektów grawitacyjnych w polskich województwach w latach 1999–2011. Ponadto dokonano oszacowania parametrów funkcji wydajności pracy na poziomie wojewódzkim. Efektem finalnym pracy było przeprowadzenie numerycznych symulacji możliwych scenariuszy zróżnicowania rozwoju ekonomicznego polskich regionów. W pierwszym scenariuszu założono, że stopy inwestycji w poszczególnych województwach były różne (średnie arytmetyczne z poprzednich okresów), w drugim zaś wariantie przyjęto, że w długim okresie stopy te będą sobie równe. Zarówno 1., jak i 2. wariant wskazują na to, że przestrzenne zróżnicowanie rozwoju ekonomicznego polskich województw może się istotnie pogłębiać, przy czym

* Uniwersytet Jagielloński, Katedra Ekonomi Matematycznej; e-mail: mroczecka@gmail.com

** Uniwersytet Jagielloński, Katedra Ekonomi Matematycznej; e-mail: tomtok67@o2.pl

*** Uniwersytet Jagielloński, Katedra Globalizacji i Integracji Ekonomicznej; e-mail: mariusz.trojak@uj.edu.pl

procesy dywergencyjne byłyby znacznie silniejsze przy utrzymaniu się dotychczasowej struktury stóp inwestycji. Co więcej, jeśli nie uwzględni się działania zewnętrznych efektów grawitacyjnych (związanych z oddziaływaniem na polskie województwa gospodarki niemieckiej) oraz portowego charakteru Trójmiasta, to okaże się, że województwami o niskim poziomie rozwoju ekonomicznego mogłyby zostać również pomorskie, zachodniopomorskie oraz lubuskie. Najsilniejsze efekty grawitacyjne w analizowanym przedziale czasu notowane były mniej więcej w czworokącie łączącym Warszawę z Poznaniem, Wrocławiem oraz aglomeracją śląsko-dąbrowską lub (być może) Krakowem. Województwami peryferyjnymi ze względu na siłę działania efektów grawitacyjnych okazały się zarówno województwa Polski wschodniej (poza województwem świętokrzyskim, które leży względnie blisko kilku dużych aglomeracji miejskich), jak i województwa pomorskie, zachodniopomorskie oraz lubuskie.

Słowa kluczowe: wzrost gospodarczy, efekt grawitacyjny, regionalne zróżnicowanie

Kody JEL: R11, E23, O47

Artykuł nadesłany 27 lutego 2014 r., zaakceptowany 14 maja 2014 r.

Wprowadzenie¹

Celem prezentowanego opracowania jest analiza przestrzennego zróżnicowania rozwoju ekonomicznego polskich województw na gruncie modelu wzrostu gospodarczego z tzw. efektem grawitacyjnym. Prezentowany w pracy model wzrostu gospodarczego nawiązuje do neoklasycznego modelu wzrostu Solowa [1956] (którego naturalnym rozszerzeniem są modele Mankiwa, Romera, Weila [1992] lub Nonnemana, Vanhoudta [1996], por. też [Tokarski 2009, 2011]). Efekt grawitacyjny w modelach makroekonomicznych polega zaś na tym, że zakłada się, iż poziom rozwoju ekonomicznego danego regionu lub kraju zależy również od czynnika grawitacyjnego. Czynnikiem grawitacyjnym łączącym dwa regiony lub kraje (przez analogię do prawa grawitacji Newtona) jest wprost proporcjonalny do iloczynu potencjału ekonomicznego tych regionów lub krajów (mierzonego np. wartością kapitału rzeczowego lub technicznego uzbrojenia pracy) oraz odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości geograficznej dzielącej owe regiony lub kraje. Dlatego też regiony lub kraje o wysokim potencjale ekonomicznym położone blisko siebie silniej na siebie oddziałują niż położone daleko od siebie regiony lub kraje o niskim potencjale ekonomicznym (czyli np. Warszawa i Łódź silniej wzajemnie wpływają na siebie niż Białystok i Rzeszów).

¹ Autorzy pragną podziękować prof. dr. hab. Armenowi Edigarianowi z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz mgr. Pawłowi Dykasowi z Katedry Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego za uwagi do matematycznej strony prezentowanego opracowania. Wyrazy podziękowania należą się także prof. dr. hab. Emilowi Pankowi, prof. dr. hab. Krzysztofowi Maladze oraz dr. Piotrowi Maćkowiakowi z Katedry Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu za bardzo rzeczowe i krytyczne uwagi do pierwotnej wersji opracowania. Rzecz jasna, cała odpowiedzialność za ostateczną wersję pracy spada wyłącznie na autorów.

Przegląd literatury

Problematyka rozwoju regionalnego jest relatywnie nowa w obszarze badań społeczno-ekonomicznych. Dyskusja na temat determinantów rozwoju ekonomicznego i społecznego regionów rozpoczęła się w połowie XX w. i od tego czasu stała się tematem wiodącym badań zarówno w środowisku akademickim, jak i politycznym. Na gruncie teoretycznym dominują modele keynesowskie i neoklasyczne, choć coraz większą popularność zyskują również modele wzrostu endogenicznego oraz modele tzw. nowej ekonomii geograficznej.

Najważniejszy neoklasyczny model wzrostu to model Solowa [1956], który uznał, że jedynymi czynnikami produkcji są kapitał rzeczowy i zasób efektywnej pracy (tzw. jednostki efektywnej pracy). Z modelu Solowa wynika, że tempo wzrostu produkcji w stanie długookresowej równowagi jest równe sumie stopy postępu technicznego i tempa wzrostu liczby ludności, stopa zaś wzrostu wydajności pracy równa jest stopie postępu technicznego w sensie Harroda.

Ciekawym modelem długookresowego wzrostu gospodarczego jest konstrukcja teoretyczna opracowana i opublikowana przez Ramseya [1928]. Model ten został rozwinięty przez Cassa oraz Koopmansa w 1965 r., stąd jest on czasem nazywany modelem Ramseya-Cassa-Koopmansa. W odróżnieniu od modelu wzrostu Solowa w modelu Ramseya-Cassa-Koopmansa przyjmuje się założenie, że stopa oszczędności kształtowana jest endogenicznie, co wynika z decyzji optymalizacyjnych racjonalnych gospodarstw domowych dążących do maksymalizacji satysfakcji (czyli sumy zdyskontowanej użyteczności konsumpcji typowych podmiotów). W modelu tym pojawia się kategoria stopy dyskonta użyteczności konsumpcji, która reprezentuje cenę, za jaką gospodarstwo domowe jest w stanie zrezygnować z konsumpcji bieżącej na rzecz konsumpcji przyszłej. Wzrost gospodarczy, który należy rozumieć jako zwiększanie się podstawowych zmiennych makroekonomicznych przypadających na pracującego, jest możliwy wówczas, gdy egzogeniczna stopa postępu technicznego jest dodatnia. Wartości konsumpcji, kapitału oraz produktu są determinowane łącznie przez parametry modelu. Inwestycje w gospodarce są wynikiem procesów optymalizacyjnych (w nieskończonym horyzoncie czasowym). Model Ramseya wskazuje na te same przyczyny długookresowego wzrostu gospodarczego, co model wzrostu Solowa.

W nurcie modeli neoklasycznych warto również zwrócić uwagę na konstrukcję teoretyczną Diamonda z 1965 r. W modelu tym okres życia gospodarstwa domowego dzieli się na dwa podokresy. W pierwszym podokresie członkowie typowego gospodarstwa domowego osiągają dochód z pracy, który przeznaczają na konsumpcję i oszczędności. Oszczędności te, powiększone o zyski kapitałowe, służą do finansowania konsumpcji w drugim okresie, gdy członkowie gospodarstwa domowego już nie pracują. W modelu tym tempo wzrostu produkcji w gospodarce jest równe sumie stopy postępu technicznego i stopy wzrostu liczby pracujących, tempo zaś wzrostu produkcji na pracującego jest równe stopie postępu technicznego. Wnioski z tego modelu są więc tożsame z wnioskami płynącymi z modelu Ramseya i Solowa. Istotną różnicą między

tymi modelami jest to, że Diamond twierdzi, iż gospodarka w warunkach doskonałej konkurencji jest dynamicznie nieefektywna. Wynika to stąd, że w modelu Diamonda zakłada się, iż gospodarstwa domowe żyją przez dwa okresy, gospodarka zaś rozwija się w nieskończoność. Ponadto płaca jest zróżnicowana w zależności od wieku: w pierwszym okresie jest ona wyższa od zera (pracownik świadczy pracę i otrzymuje wynagrodzenie), natomiast w drugim okresie stawka płacy wynosi zero (pracownik nie pracuje – nie otrzymuje zatem żadnego wynagrodzenia). Wskazane przesłanki implikują powstawanie w gospodarce nadmiernej akumulacji kapitału.

Z oczywistych powodów badania w nurcie keynesowskim nawiązują do koncepcji Keynesa i wiążą się ze stymulowaniem zagregowanego popytu (głównie przez interwencje rządowe). Pierwszym keynesowskim modelem wzrostu gospodarczego był model Harroda z 1939 r. W modelu tym zakłada się, że w gospodarce mamy do czynienia z dwiema stopami wzrostu gospodarczego – stopą gwarantowaną oraz stopą naturalną. Stopa gwarantowana wynika z równowagi oszczędności i inwestycji oraz wpływu inwestycji na zdolności produkcyjne gospodarki (czego nie dostrzegali Keynes). Natomiast naturalna stopa wzrostu wiąże się ze zmianami w liczbie pracujących oraz w stopie wzrostu wydajności pracy. Gospodarka znajduje się w stanie równowagi wówczas, gdy stopa gwarantowana jest równa stopie naturalnej. W modelu wzrostu Harroda zakłada się również, że stopa wzrostu liczby pracujących oraz stopa wzrostu wydajności pracy mają charakter egzogeniczny, a współczynnik kapitałochłonności jest stały w czasie. Z tego względu równowaga makroekonomiczna ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy stopa oszczędności jest równa iloczynowi współczynnika kapitałochłonności i sumy stopy wzrostu liczby pracujących oraz stopy wzrostu wydajności pracy. Zdaniem Harroda stopa oszczędności zmienia się w czasie, a więc stan równowagi jest raczej przypadkiem niż prawidłowością. W związku z tym konieczna jest interwencja państwa, by równoważyć niekorzystne zmiany rynkowe.

Kolejnym modelem wiążącym wzrost gospodarczy ze zagregowanym popytem i koniecznością interwencji państwa jest model Domara. Domar założył, że popyt na rynku produktu zależy od egzogenicznych inwestycji netto (zgodnie z formułą mnożnika Keynesa). W przeciwieństwie do modelu Keynesa w modelu Domara inwestycje mają również efekty podażowe. Zagregowana podaż jest iloczynem inwestycji netto i potencjalnej społecznie przeciętnej efektywności inwestycji. Aby gospodarka znajdowała się w stanie długookresowej równowagi popytu i podaży, stopa wzrostu inwestycji musi się równać ilorazowi krańcowej (równej przeciętnej) skłonności do oszczędności i współczynnika kapitałochłonności. W praktyce, zdaniem Domara, taka równość jest sporadyczna i gospodarka może znajdować się na tzw. ostrzu noża, balansując na ścieżce wzrostu zapewniającej równowagę makroekonomiczną. Każde ześlizgnięcie się gospodarki z tej ścieżki oznacza powstanie długotrwałej, pogłębiającej się nierównowagi. W związku z tym Domar postulował konieczność interwencji rządowych w celu stymulowania popytu inwestycyjnego.

Ciekawą modyfikacją modeli typu Harroda-Domara jest koncepcja wzrostu gospodarczego Kaldora. W modelu tym funkcja produkcji ma takie same

właściwości jak w modelach typu Harroda-Domara. Główna różnica między wcześniej prezentowanymi modelami popytowymi a modelem Kaldera polega na dezagregacji stopy oszczędności całej gospodarki na stopę oszczędności z płac i stopę oszczędności z zysków. Dzięki temu gospodarka znajduje się w stanie długookresowej równowagi wówczas, gdy stopa wzrostu efektywnej pracy znajduje się w przedziale domkniętym z dołu przez iloraz oszczędności z płac i współczynnika kapitałochłonności oraz domkniętym z góry przez relację stopy oszczędności z zysków do współczynnika kapitałochłonności.

Znaczący wkład w rozwój myśli ekonomicznej dotyczącej problematyki wzrostu gospodarczego miały również prace Kaleckiego. Jego keynesowski model wzrostu gospodarczego, zbliżony do koncepcji Harroda i Domara, choć opracowany w odniesieniu do gospodarki socjalistycznej, opartej na centralnym planowaniu, może być adaptowany do warunków gospodarki rynkowej.

Kolejną grupą modeli wyjaśniających długookresowy wzrost gospodarczy są tzw. modele endogenicznego wzrostu. Wyjaśniają one wzrost gospodarczy inaczej niż modele neoklasyczne, w których wzrost wynika z egzogenicznego postępu technicznego. Osiągnięcie endogenicznego wzrostu gospodarki możliwe jest przy założeniu co najmniej stałych przychodów z odtwarzalnych czynników produkcji. Istotnym osiągnięciem na gruncie teorii wzrostu był model Romera [1986, 1990]. W modelu tym założono, że jedynym odtwarzalnym czynnikiem wytwórczym jest wiedza, która wykazuje rosnące przychody na poziomie całej gospodarki. To założenie wydaje się być sensowne, ponieważ wiedza powstała dzięki inwestycjom pojedynczych przedsiębiorstw ma tendencję do rozprzestrzeniania się w całej gospodarce. Tak więc korzystają z niej także przedsiębiorstwa, które nie poniosły nakładów inwestycyjnych lub dodatkowych kosztów. Taka koncepcja określana jest mianem *learning-by-doing*, co oznacza nabywanie wiedzy przez praktykę (doświadczenie). Dzięki takiemu założeniu gospodarka może znajdować się ciągle na wznoszącej ścieżce rozwoju gospodarczego, bez konieczności uwzględniania zmiennych rosnących w tempie egzogenicznym.

Kolejnym ważnym modelem endogenicznego wzrostu jest model Lucasa [1988, 2010]. Praca ta nawiązuje w pewnym sensie do koncepcji Romera, wykorzystując ideę *learning-by-doing*. Istotną różnicą między tymi modelami jest natomiast to, że model należy do grupy dwusektorowych modeli wzrostu, w których czynnikiem produkcji oprócz kapitału rzeczowego jest również kapitał ludzki. Tak więc produkcja jest wynikiem trzech czynników: kapitału rzeczowego, zasobów siły roboczej i kapitału ludzkiego zgromadzonego w gospodarce. Stopy wzrostu takich kategorii makroekonomicznych, jak produkcja, kapitał i kwalifikacje pracownicze (będące ucieleśnieniem kapitału ludzkiego) zależą od preferencji odnośnie do konsumpcji w czasie. Im bardziej gospodarstwa domowe przedkładają konsumpcję bieżącą nad konsumpcję przyszłą, tym niższą stopę wzrostu uzyskuje gospodarka. Jeśli zaś gospodarstwa domowe preferują oszczędzanie (na rzecz wzrostu konsumpcji przyszłej), wyższe jest tempo wzrostu gospodarczego na pracującego, gdyż przychody z nakładów kapitału ludzkiego są rosnące, a z nakładów całego kapitału rzeczowego – niemające.

Tak więc tempo wzrostu gospodarczego jest wypadkową preferencji gospodarstw domowych co do struktury konsumpcji w czasie (por. też [Tokarski 2011]).

Ciekawym modelem wzrostu gospodarczego jest również konstrukcja teoretyczna autorstwa Mankiwa, Romera i Weila [1992]. Czasem nazywa się ją rozszerzonym modelem Solowa, gdyż stanowi kontynuację neoklasycznej teorii wzrostu i nie ma charakteru endogenicznego². Model ten jednak uwzględnia znaczenie kapitału ludzkiego w stymulowaniu wzrostu gospodarczego. W modelu Mankiwa-Romera-Weila gospodarka ma naturalne tendencje do pewnej ścieżki wzrostu równomiernego, której stopa wzrostu jest równa stopie wzrostu postępu technicznego. Położenie tej ścieżki uzależnione jest głównie od: poziomu i struktury inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki, stopy wzrostu liczby pracujących oraz stopy deprecjacji obu zasobów kapitału. Im wyższa jest stopa wzrostu liczby pracujących lub im wyższa jest stopa deprecjacji kapitału ludzkiego i rzeczowego, tym niżej położona jest ścieżka wzrostu gospodarczego.

Nowa ekonomia geograficzna jest dziedziną wiedzy, w której przyjmuje się założenie, że aktywność ekonomiczna podmiotów zależna jest od czynników lokalizacyjnych. Za prekursora tego nurtu badawczego uznaje się Krugmana, który opublikował model równowagi przestrzennej alokacji aktywności gospodarczych [Krugman 1979]. Wskazał on, że koszty transportu w połączeniu ze zjawiskiem rosnących korzyści skali prowadzą do efektu aglomeracji, co przejawia się tym, że produkcja koncentruje się w regionach o wyższym poziomie produkcji i do nich kieruje się migracja siły roboczej z regionów o niższym poziomie produkcji. Powoduje to powstawanie regionów centralnych o wysokim potencjale wzrostu i regionów ubogich (peryferyjnych), które z przyczyn dużej odległości od centrów nie są w stanie rozwijać się szybko. Do podobnych wniosków dochodzili między innymi: Krugman i Venables [1995], Venables [1996], Engelman i Waltz [1995], Puga i Venables [1996], Puga [1998] oraz Martin i Ottaviano [2001].

Bardzo ciekawą koncepcją, która wydaje się w przejrzysty sposób wyjaśniać wpływ lokalizacji i wielkości poszczególnych regionów (lub krajów) na relacje pomiędzy istotnymi zmiennymi makroekonomicznymi, jest tzw. grawitacyjny model rozwoju ekonomicznego, który (ze względu na szerokie zastosowanie w pracach nad handlem międzynarodowym) określany jest jako grawitacyjny model handlu zagranicznego. Jest to adaptacja prawa powszechnego ciężenia Newtona na potrzeby opisu i wyjaśnienia zjawisk makroekonomicznych. W latach sześćdziesiątych XX w. równoczesne badania na temat przyciągania się gospodarek w obszarze wymiany handlowej prowadzili Tinbergen [1962], Pullainen [1963], Linemann [1963] i Pöyhönen [1963]. Jednak praca Tinbergena została uznana za pionierską, a przyjęte przez niego założenia opisuje następujące równanie:

² Model Mankiwa, Romera i Weila [1992], podobnie jak model Nonnemana, Vanhoudta [1996], tak w sensie matematycznym, jak i ekonomicznym stanowi uogólnienie modelu Solowa [1956].

$$X_{ij} = C \frac{Y_i^a Y_j^b}{D_{ij}^d},$$

gdzie:

X_{ij} reprezentuje przepływy międzynarodowe pomiędzy krajami i oraz j ;

Y_i, Y_j oznacza wielkość ekonomiczną krajów i oraz j ;

D_{ij} to odległość pomiędzy krajami i oraz j ;

a, b oraz d to elastyczności poszczególnych zmiennych względem wartości przepływów międzynarodowych.

Z powyższego równania jednoznacznie wynika, że wartość przepływów pomiędzy dwoma krajami jest wprost proporcjonalna do ich wielkości ekonomicznej i odwrotnie proporcjonalna do odległości pomiędzy nimi. Wielkość gospodarek jest ważnym czynnikiem decydującym o kontaktach międzynarodowych poszczególnych gospodarek, ponieważ z reguły charakteryzują się one zdolnością do nabywania dużej ilości dóbr importowanych, jak również mają zdolność do wytwarzania dużej liczby różnorodnych dóbr i usług, będących przedmiotem eksportu. Jeśli ocenie poddane są zjawiska mierzone wyrażone w jednostkach pieniężnych, wówczas najczęściej zmiennymi tymi są PKB lub PKB *per capita*. Gdy zaś badanie dotyczy pomiaru przepływów innych strumieni (migracje lub ruch turystyczny), wówczas miary obrazujące wielkość gospodarek dotyczą populacji. Zgodnie z prawem powszechnego ciężenia odległość między dwoma ciałami zmniejsza siłę ich wzajemnego przyciągania. W odniesieniu do badania zjawisk ekonomicznych uznaje się, że odległość między krajami zmniejsza intensywność wymiany ze względu na rosnące koszty transportu.

W wielu badaniach dotyczących handlu zagranicznego zwracano uwagę, że w warunkach globalizacji i liberalizacji przepływów koszty transportu mają niewielkie znaczenie. Badania empiryczne wskazują jednak na ich bardzo istotny negatywny wpływ na siłę wymiany handlowej. W wielu badaniach jednak odległość nie ma jedynie wymiaru geograficznego. Wskazuje się bowiem, że istnieją dwie grupy czynników zmniejszających intensywność wymiany. Pierwsza grupa to czynniki o charakterze ekonomicznym, druga zaś obejmuje czynniki o charakterze politycznym bądź instytucjonalnym. Do pierwszej należą m.in.:

- geograficzna odległość pomiędzy ekonomicznymi centrami (najczęściej stolicami państw);
- czynniki naturalne, tj. charakter linii brzegowej pomiędzy krajami, górzystość terenu, wyspowe bądź kontynentalne położenie kraju, jakość infrastruktury transportowej itp.;
- przynależność do wspólnych obszarów walutowych, stref wolnego handlu, występowanie barier handlowych o charakterze taryfowym i pozataryfowym;
- podobieństwo kulturowe (język, religia, zwyczaje, przeszłość kolonialna);
- posiadanie wspólnej granicy;
- stopień aglomeracji;
- parametry makroekonomiczne poszczególnych krajów, tj. stopa inflacji, stopa bezrobocia, opodatkowanie dochodów osobistych i korporacyjnych, wydajność pracy, jakość kapitału ludzkiego itp.

Do drugiej zaś grupy czynników zalicza się regulacje oraz konflikty polityczne i militarne itp.

Większość badań z wykorzystaniem modelu grawitacyjnego wiąże się z estymowaniem parametrów następującego równania:

$$\ln X_{ij} = \alpha_0 \ln C + \alpha_1 \ln Y_i + \alpha_2 \ln Y_j + \alpha_3 \ln D_{ij} + \varepsilon_{ij},$$

przy czym zakłada się, że α_1 , α_2 przyjmują wartości dodatnie, zaś α_3 – ujemną. Włączenie do modelu czynnika losowego ε_{ij} pozwala na oszacowanie jego parametrów z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów (dalej MNK).

W ciągu ostatnich niemal pięćdziesięciu lat wielu autorów rozwijało model, dołączając do przedstawionego równania wiele dodatkowych zmiennych, próbując je klasyfikować jako determinanty wielkości gospodarek bądź determinanty odległości. Równocześnie rozwijano metody analityczne służące do estymacji parametrów przyjętych równań. Oprócz wspomnianej MNK wykorzystuje się głównie: MNK z efektem stałej, uogólnioną metodę MNK bez efektu stałej lub z efektem stałej bądź też modele tobitowe.

Jak już wskazano, większość prac wykorzystujących ten model ma charakter empiryczny, badacze zaś koncentrują się na wyszukiwaniu coraz to nowych czynników przyciągających, a także oddalających poszczególne regiony, czy kraje. W literaturze spotkać można niewiele prac o charakterze teoretycznym, które w przekonujący sposób wykazałyby istnienie punktu stacjonarnego oraz jego stabilności. Lukę tę próbują wypełnić autorzy niniejszego opracowania na gruncie modelu typu Solowa.

Model grawitacyjny

Założenia modelu

Założenia analizowanego dalej modelu teoretycznego przedstawiają się następująco³:

1) Funkcja wydajności pracy, wynikająca z funkcji produkcji Cobba-Douglassa (por. np. [Żółtowska 1997] czy [Tokarski 2009, 2011]), dana jest wzorem⁴:

$$\forall j \quad y_j(t) = (\bar{f}_j(t))^\beta (k_j(t))^\alpha, \quad (1)$$

³ Zapis $\forall j$ oznaczać będzie dalej $\forall j = 1, 2, \dots, N$ gdzie N jest liczbą analizowanych regionów (przy czym $N > 2$). Podobnie odczytuje się wyrażenia: $\sum_j x_j$ oraz $\prod_j x_j$.

⁴ Wielkości y_i oraz k_i można traktować zarówno jako produkcję oraz kapitał rzeczowy na pracującego, jak i jako wielkości przeliczone na tzw. jednostkę efektywnej pracy (jak ma to miejsce w modelach Mankiwa, Romera, Weila [1992] lub Nonnemana, Vanhoudta [1996]). Sposób interpretacji owych zmiennych nie ma jednak większego znaczenia dla wniosków wyciąganych z prezentowanego modelu wzrostu gospodarczego, gdyż autorów interesują głównie relacje pomiędzy k_j i k_m oraz y_j i y_m , a nie ich bezwzględne poziomy.

gdzie: $0 < \beta < \alpha < \alpha + \beta < 1$ oraz $1 - \alpha - \beta > \beta$.⁵ Wielkość $y_j(t)$ oznacza wydajność pracy w regionie j ; $k_j(t)$ – techniczne uzbrojenie pracy w owym regionie; wielkość zaś $(\bar{f}_j(t))^\beta$ w funkcji wydajności pracy (1) to łączna produktywność czynników produkcji w regionie j . Z równania (1) wynika zaś, iż łączna produktywność czynników produkcji w regionie j zależna jest od łącznego efektu grawitacji, który łączy region j z regionami $m \neq j$ (efekt ów opisany jest zaś w założeniach 2–3). Parametr α oznacza elastyczność wielkości produkcji (lub wydajności pracy) względem nakładów kapitału rzeczowego (lub technicznego uzbrojenia pracy) bądź też (na gruncie marginalnej teorii podziału Clarka) udział nakładów kapitału w wytworzonym produkcie. Natomiast parametr β jest elastycznością łącznej produktywności czynników produkcji względem łącznego efektu grawitacyjnego, opisanego przez $\bar{f}_j(t)$.

2) Siłę łącznego efektu grawitacyjnego oddziałującego na region j opisuje związek:

$$\forall j \quad \bar{f}_j(t) = \sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} f_{jm}(t)}, \quad (2)$$

gdzie \bar{f}_j (dla kolejnych j) opisuje łączny efekt grawitacyjny, który jest średnią geometryczną z jednostkowych efektów grawitacyjnych f_{jm} opisanych w założeniu 3.

3) Siła jednostkowego efektu grawitacyjnego z regionu m (dla $m \neq j$) na region j dana jest przez zależność:

$$\forall j, m \wedge m \neq j \quad f_{jm}(t) = \frac{k_j(t)k_m(t)}{d_{jm}^2}, \quad (3)$$

gdzie $d_{jm} > 0$ oznacza odległość (geograficzną) regionu j od regionu m .

4) Równanie akumulacji kapitału (a dokładnie rzecz biorąc akumulacji technicznego uzbrojenia pracy, czyli kapitału na pracującego k_j) w j -tym regionie, podobnie jak w modelu wzrostu Solowa [1956], wygląda następująco⁶:

⁵ Przyjęcie założenia, że $\beta < 1 - \alpha - \beta$ w równaniu (1) implikuje tyle, iż $\beta < \frac{1 - \alpha}{2}$, co jest bardzo istotne dla pokazania stabilności nietrywialnego punktu stacjonarnego układu równań różniczkowych (7) na podstawie twierdzenia Grobmana-Hartmana. Założenie to (na gruncie marginalnej teorii podziału Clarka – por. np. [Tokarski 2009, rozdz. 1]) oznacza ekonomicznie tyle, iż elastyczność produkcji Y względem efektu grawitacyjnego f jest mniejsza od połowy udziału nakładów pracy L w wytworzonym produkcie Y .

⁶ O wszystkich zmiennych makroekonomicznych występujących w tym rozdziale opracowania zakłada się, iż są różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \geq 0$. Zapis $x(t)$ oznaczał będzie dalej wartość zmiennej x w momencie t , natomiast $\dot{x}(t) = dx/dt$ – pochodną zmiennej x po czasie t , czyli (ekonomicznie rzecz ujmując) przyrost wartości zmiennej x w momencie t .

$$\forall j \dot{k}_j(t) = s_j y_j(t) - \mu_j k_j(t), \quad (4)$$

przy $\forall j s_j \in (0;1) \wedge \mu_j > 0$, gdzie s_j oznacza stopę inwestycji w j -tym regionie, zaś μ_j jest stopą ubytku kapitału na pracującego w owym regionie⁷.

Punkt stacjonarny i jego stabilność

Z równań (2–3) uzyskuje się:

$$\forall j \bar{f}_j(t) = \frac{k_j(t) \prod_{m \neq j} (k_m(t))^{1/(N-1)}}{\bar{d}_j^2}, \quad (5)$$

gdzie: $\forall j \bar{d}_j = \sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} d_{jm}}$ jest średnią geometryczną z odległości j -tego regionu od pozostałych regionów $m \neq j$. Po wstawieniu równania (5) do funkcji wydajności pracy (1) mamy:

$$\forall j y_j(t) = \frac{\prod_{m \neq j} (k_m(t))^{\beta/(N-1)} (k_j(t))^{\alpha+\beta}}{\bar{d}_j^{2\beta}}. \quad (6)$$

Funkcja wydajności pracy (6) uzależnia wydajność pracy w regionie j od technicznego uzbrojenia pracy zarówno w tym regionie (k_j), jak i w pozostałych regionach $m \neq j$ (k_m) oraz od średniej geometrycznej z odległości regionu j od pozostałych regionów $m \neq j$, czyli \bar{d}_j . Z zależności (6) oraz związków (4) dochodzi się do następującego układu równań różniczkowych:

$$\forall j \dot{k}_j(t) = \frac{s_j}{\bar{d}_j^{2\beta}} \prod_{m \neq j} (k_m(t))^{\beta/(N-1)} (k_j(t))^{\alpha+\beta} - \mu_j k_j(t). \quad (7)$$

Układ równań różniczkowych (7) ma dwa punkty stacjonarne: punkt trywialny $(0; 0; \dots; 0)$ oraz pewien punkt nietrywialny $k^* = (k_1^*, k_2^*, \dots, k_N^*) \in (0, +\infty)^N$. Punkt trywialny (jako nieciekawy tak z matematycznego, jak i ekonomicznego punktu widzenia) będzie dalej pomijany. Natomiast w punkcie nietrywialnym, przy $\dot{k}_1 = \dot{k}_2 = \dots = \dot{k}_N = 0$ oraz $\forall j k_j^* > 0$, spełnione są związki:

⁷ Jeśli k_j oznacza techniczne uzbrojenie pracy, to μ_j jest sumą stopy deprecjacji kapitału oraz stopy wzrostu liczby pracujących. Natomiast w przypadku, w którym k_j interpretuje się jako kapitał na jednostkę efektywnej pracy, μ_j należy odczytywać jako sumę stopy deprecjacji kapitału, stopy wzrostu liczby pracujących i stopy postępu technicznego w sensie Harroda.

$$\left. \begin{aligned} & - (1 - \alpha - \beta) \ln k_1^* + \frac{\beta}{N-1} \sum_{j \neq 1} \ln k_j^* = \theta_1 \\ & - (1 - \alpha - \beta) \ln k_2^* + \frac{\beta}{N-1} \sum_{j \neq 2} \ln k_j^* = \theta_2 \\ & \quad \vdots \\ & - (1 - \alpha - \beta) \ln k_N^* + \frac{\beta}{N-1} \sum_{j \neq N} \ln k_j^* = \theta_N \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

gdzie: $\forall j \theta_j = \ln \left(\frac{\mu_j \bar{d}_j^{2\beta}}{s_j} \right)$. Po dość żmudnych przekształceniach można pokazać, że w punkcie k^* zachodzą związki:

$$\forall j \ln k_j^* = \frac{\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)} \sum_m \ln \left(\frac{s_m}{\mu_m \bar{d}_m^{2\beta}} \right) + \ln \left(\frac{s_j}{\mu_j \bar{d}_j^{2\beta}} \right)}{1 - \alpha - \frac{N-2}{N-1} \beta}. \quad (9)$$

Macierz Jacobiego układu równań różniczkowych (7) określa związek⁸:

$$J = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta) s_1 \frac{y_1}{k_1} - \mu_1 & \frac{\beta s_1 y_1}{(N-1) k_2} & \dots & \frac{\beta s_1 y_1}{(N-1) k_N} \\ \frac{\beta s_2 y_2}{(N-1) k_1} & (\alpha + \beta) s_2 \frac{y_2}{k_2} - \mu_2 & \dots & \frac{\beta s_2 y_2}{(N-1) k_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta s_N y_N}{(N-1) k_1} & \frac{\beta s_N y_N}{(N-1) k_2} & \dots & (\alpha + \beta) s_N \frac{y_N}{k_N} - \mu_N \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Ponieważ w nietrywialnym punkcie stacjonarnym k^* spełnione są związki:

$$\forall j \mu_j = \frac{s_j y_j^*}{k_j^*},$$

zatem w punkcie tym macierz Jacobiego (10), oznaczaną dalej jako J^* , można zapisać wzorem:

⁸ Podobny dowód, dotyczący stabilności uogólnionego modelu Nonnemana-Vanhoudta, znajduje się w pracy Dykasa, Sulimy i Tokarskiego [2008]. Por. też alternatywny dowód w pracy Dykasa, Edigariana i Tokarskiego [2010].

$$J^* = \begin{bmatrix} -(1-\alpha-\beta)s_1 \frac{y_1^*}{k_1^*} & \frac{\beta s_1 y_1^*}{(N-1)k_2^*} & \dots & \frac{\beta s_1 y_1^*}{(N-1)k_N^*} \\ \frac{\beta s_2 y_2^*}{(N-1)k_1^*} & -(1-\alpha-\beta)s_2 \frac{y_2^*}{k_2^*} & \dots & \frac{\beta s_2 y_2^*}{(N-1)k_N^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta s_N y_N^*}{(N-1)k_1^*} & \frac{\beta s_N y_N^*}{(N-1)k_2^*} & \dots & -(1-\alpha-\beta)s_N \frac{y_N^*}{k_N^*} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Wartości własne λ macierzy Jacobiego (11) rozwiązują następujące równanie:

$$Q = |J^* - \lambda I| = 0,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową o wymiarach $N \times N$.

Można pokazać, że:

$$Q = \frac{\left(\prod_j s_j\right) \left(\prod_j y_j^*\right)}{\prod_j k_j^*} \left(\frac{\beta}{N-1}\right)^N \bar{Q},$$

gdzie:

$$\bar{Q} = \begin{vmatrix} -\frac{1-\alpha-\beta}{\beta}(N-1) - \frac{k_1^*(N-1)\lambda}{\beta s_1 y_1^*} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\frac{1-\alpha-\beta}{\beta}(N-1) - \frac{k_2^*(N-1)\lambda}{\beta s_2 y_2^*} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -\frac{1-\alpha-\beta}{\beta}(N-1) - \frac{k_N^*(N-1)\lambda}{\beta s_N y_N^*} \end{vmatrix},$$

co powoduje, że wartości własne λ rozwiązują równanie $\bar{Q} = 0$. Wyznacznik \bar{Q} można także zapisać następująco:

$$\bar{Q} = \begin{vmatrix} -\Omega - \omega_1 \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\Omega - \omega_2 \lambda & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -\Omega - \omega_N \lambda \end{vmatrix}, \quad (12)$$

gdzie: $\Omega = \frac{1-\alpha-\beta}{\beta}(N-1) > 0$ oraz: $\forall j \omega_j = \frac{(N-1)k_j^*}{\beta s_j y_j^*} > 0$. Wyznacznik (12),

po kilku elementarnych przekształceniach, określa związek:

$$\bar{Q} = (-1)^N \prod_j (\Omega + 1 + \omega_j \lambda) \left(1 - \sum_j \frac{1}{\Omega + 1 + \omega_j \lambda} \right). \quad (13)$$

Zgodnie z zależnością (13) wartości własne λ macierzy Jacobiego J^* rozwiązują równanie:

$$1 - \sum_j \frac{1}{\Omega + 1 + \omega_j \lambda} = 0. \quad (14)$$

Szukając zaś rozwiązań równania (14) zapiszmy:

$$\lambda = a + bi,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, zaś $i = \sqrt{-1}$. Wówczas z zależności (14) wynika, że:

$$\sum_j \frac{1}{\Omega + 1 + \omega_j a + \omega_j bi} = 1. \quad (15)$$

Ponieważ każda liczba zespolona z spełnia związek:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

gdzie \bar{z} jest liczbą sprzężoną z liczbą z , więc – zgodnie z równaniem (15) – mamy:

$$\sum_j \frac{\Omega + 1 + \omega_j a - \omega_j bi}{(\Omega + 1 + \omega_j a)^2 + \omega_j^2 b^2} = 1$$

lub:

$$\sum_j \frac{\Omega + 1 + \omega_j a}{(\Omega + 1 + \omega_j a)^2 + \omega_j^2 b^2} - bi \sum_j \frac{\omega_j}{(\Omega + 1 + \omega_j a)^2 + \omega_j^2 b^2} = 1,$$

co prowadzi do wniosku, iż $b = 0$, a zatem wartości własne rozwiązujące równanie (15) są liczbami rzeczywistymi. Stąd zaś wynika, że równanie (15) można zapisać następująco:

$$\sum_j \frac{1}{\Omega + 1 + \omega_j a} = 1. \quad (16)$$

Pokażemy teraz, że a w równaniu (16) jest liczbą ujemną. W tym celu przeprowadzimy prosty dowód nie wprost. Niech więc $a \geq 0$, co powoduje, że:

$$\sum_j \frac{1}{\Omega + 1 + \omega_j a} \leq \sum_j \frac{1}{\Omega + 1} = \frac{N}{\Omega + 1} = \frac{N\beta}{(1 - \alpha - \beta)(N - 1) + \beta} < \frac{N\beta}{(N - 1)\beta + \beta} = 1,$$

zaś to jest sprzeczne z równaniem (16). Oznacza to, iż $\lambda = a < 0$.

Płyńie stąd wniosek, iż wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego J^* są rzeczywistymi liczbami ujemnymi. Dlatego też – zgodnie z twierdzeniem Grobmana-Hartmana (por. np. [Ombach 1999, s. 219–221]) – nietrywialny punkt stacjonarny k^* układu równań różniczkowych (7) jest punktem asymptotycznie stabilnym. Płyńie stąd wniosek, że punkt ten jest punktem asymptotycznej, długookresowej równowagi rozważanego tu modelu wzrostu gospodarczego.

Zgodnie z równaniem (9) zachodzi zależność:

$$\forall j, m \wedge m \neq j \quad \frac{k_j^*}{k_m^*} = \left(\frac{s_j \mu_m \bar{d}_m^{2\beta}}{s_m \mu_j \bar{d}_j^{2\beta}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta}}. \quad (17)$$

Z równania (6) wynika zaś, że:

$$\forall j, m \wedge m \neq j \quad \frac{y_j^*}{y_m^*} = \frac{(k_j^*/k_m^*)^{\alpha+\frac{N-2}{N-1}\beta}}{(\bar{d}_j^2/\bar{d}_m^2)^{\beta}}, \quad (18)$$

gdzie $\forall j$ y_j^* oznacza wydajność pracy w regionie j w długookresowej równowadze analizowanego modelu wzrostu gospodarczego. Z zależności (17–18) uzyskuje się:

$$\forall j, m \wedge m \neq j \quad \frac{y_j^*}{y_m^*} = \frac{\left(\frac{s_j \mu_m}{\mu_j s_m} \right)^{\frac{\alpha+\frac{N-2}{N-1}\beta}{1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta}}}{\left(\frac{\bar{d}_j^2}{\bar{d}_m^2} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta}}}. \quad (19)$$

Z równania (17) wynika, że relacje pomiędzy długookresowym technicznym uzbrojeniem pracy w dowolnych dwóch regionach są tym wyższe, im wyższe są ilorazy $\frac{s_j/\mu_j}{s_m/\mu_m}$ (co jest wnioskiem analogicznym do tego, który płyńie z modelu Solowa [1956]) oraz tym niższe, im wyższe są relacje odległości \bar{d}_j/\bar{d}_m (co wynika z działania efektu grawitacyjnego). Natomiast z równania (19) płyńie wniosek, że podobnie rzecz się ma z relacjami pomiędzy długookresowymi poziomami wydajności pracy w regionach j oraz m .

Kalibracja parametrów modelu

W poprzednim punkcie scharakteryzowano grawitacyjny model wzrostu gospodarczego opisujący przestrzenne zróżnicowanie rozwoju ekonomicznego regionów, nawiązujący do modelu wzrostu Solowa. W tym zaś punkcie znajdują się zarówno opisowe analizy przestrzennego zróżnicowania technicznego

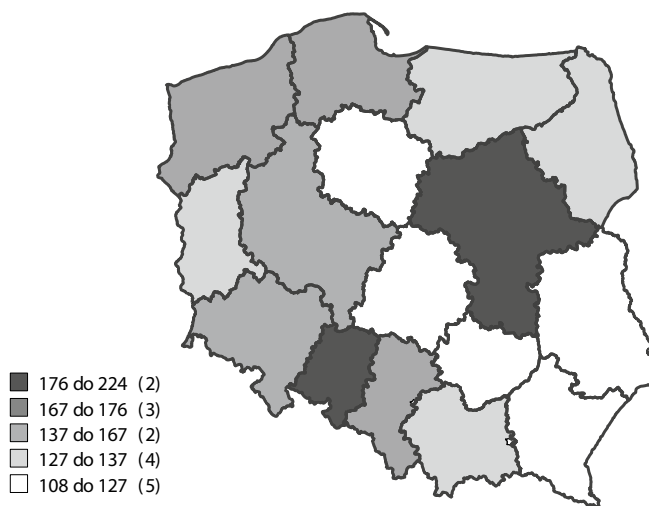
uzbrojenia pracy, wydajności pracy, jednostkowych i łącznych efektów grawitacyjnych w polskich województwach w latach 1999–2011, jak również oszacowania parametrów funkcji wydajności pracy na poziomie wojewódzkim.

Zróżnicowanie technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy w województwach⁹

Mapa 1 przedstawia przestrzenne zróżnicowanie technicznego uzbrojenia pracy w województwach średnio w latach 1999–2011. Dane zilustrowane na tej mapie pozwalają na sformułowanie następujących wniosków¹⁰:

- Zdecydowanie najwyższym średnim poziomem technicznego uzbrojenia pracy charakteryzowało się województwo mazowieckie (średnio w latach 1999–2011 wyniosło ono 223,73 tys. zł). Na drugiej pozycji (jednak już ze znacznie niższym poziomem opisywanej tu zmiennej) uplasowało się województwo opolskie (176,41 tys. zł).
- Wysoki przeciętny poziom kapitału na pracującego odnotowały także województwa: zachodniopomorskie (175,73 tys. zł), pomorskie (168,92 tys. zł), śląskie (167,75 tys. zł) oraz dolnośląskie (166,84 tys. zł).

Mapa 1. Przestrzenne zróżnicowanie technicznego uzbrojenia pracy w latach 1999–2011 (tys. zł, ceny stałe 2011)



Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych na www.stat.gov.pl (Bank Danych Lokalnych).

⁹ Szerzej na temat przestrzennego zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw np. [Tokarski 2005; Malaga i Kliber 2007; Mroczek i Tokarski 2013a, 2013b; Trojak i Tokarski 2013].

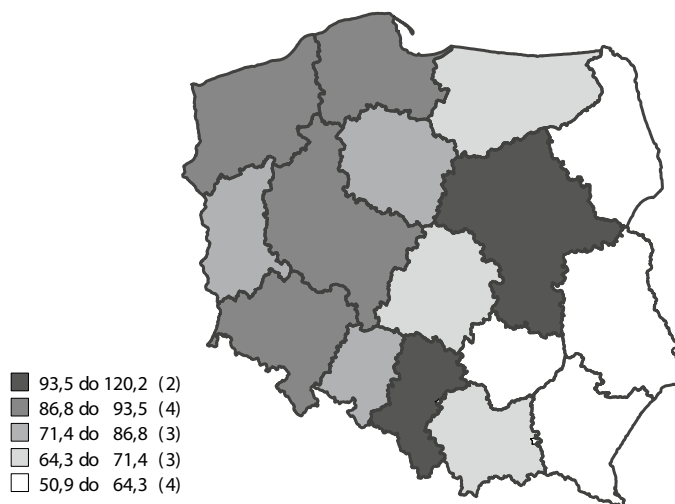
¹⁰ Wszystkie podane dalej wielkości wyrażone w jednostkach pieniężnych (zł) przeliczone są na ceny stałe z roku 2011.

- Wysokie techniczne uzbrojenie pracy charakteryzowało głównie województwa z silnymi, atrakcyjnymi dla inwestorów ośrodkami miejskimi, takimi jak Warszawa, Wrocław, Trójmiasto czy aglomeracja śląsko-dąbrowska. Z drugiej strony wysoki poziom analizowanej zmiennej w województwie opolskim czy zachodniopomorskim najprawdopodobniej związany był z mniejszym znaczeniem sektora rolniczego w tych regionach (zarówno w strukturze wytwarzanego PKB, jak i w strukturze pracujących).
- Do grupy o najniższym średnim poziomie technicznego uzbrojenia pracy należały województwa: kujawsko-pomorskie (126,73 tys. zł), podkarpackie (120,50 tys. zł), świętokrzyskie (115,73 tys. zł), łódzkie (114,98 tys. zł) oraz lubelskie (108,48 tys. zł). Wymienione województwa nadal charakteryzują się wysokim udziałem pracujących w sektorze rolniczym, co najprawdopodobniej było główną przyczyną niskich wartości technicznego uzbrojenia pracy w tych regionach (por. też [Tokarski 2005; Mroczek i Tokarski 2013a]).

Na mapie 2 zaprezentowano dane dotyczące wydajności pracy w województwach przeciętnie w latach 1999–2011. Z mapy płyną następujące wnioski:

- Podobnie jak w przypadku kapitału na pracującego, najwyższa średnia wydajność pracy została odnotowana w województwie mazowieckim (średnio w latach 1999–2011 wyniosła ona 120,2 tys. zł). Drugie miejsce pod względem omawianej zmiennej makroekonomicznej zajęło województwo śląskie (96,85 tys. zł).
- Wysoki średni poziom wydajności pracy odnotowały także województwa: pomorskie (93,5 tys. zł), dolnośląskie (93,44 tys. zł), zachodniopomorskie (88,43 tys. zł) oraz wielkopolskie (86,83 tys. zł).

Mapa 2. Przestrzenne zróżnicowanie wydajności pracy w latach 1999–2011 (tys. zł, ceny stałe 2011)



Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych na www.stat.gov.pl (Bank Danych Lokalnych).

- Najniższym średnim poziomem wydajności pracy charakteryzowały się słabiej rozwinięte ekonomicznie województwa wschodnie, tj. podlaskie (61,49 tys. zł), podkarpackie (58,66 tys. zł), świętokrzyskie (57,96 tys. zł) i lubelskie (50,99 tys. zł).

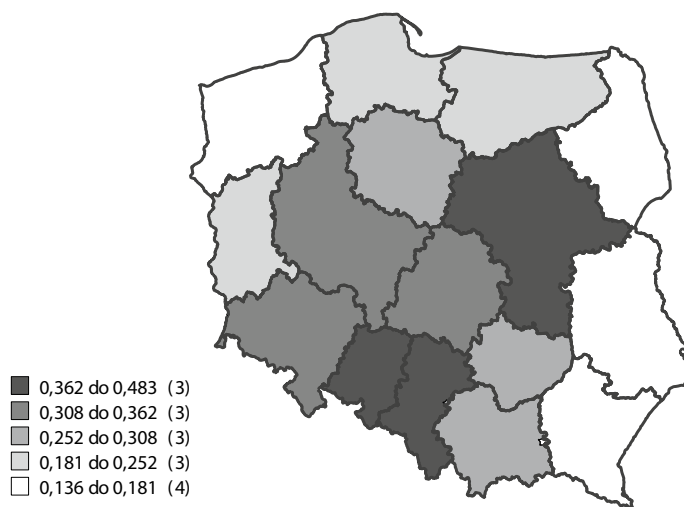
Efekt grawitacyjny w województwach

Indywidualne efekty grawitacyjne policzone były jako iloczyny technicznego uzbrojenia pracy w województwach j oraz m podzielone przez kwadrat odległości w linii prostej między stolicami tych województw¹¹. Dane dotyczące owych odległości uzyskano ze strony <http://www.odleglosci.pl/odleglosci.php>.

Przestrzenne zróżnicowanie łącznych efektów grawitacyjnych w Polsce przeciętnie w latach 1999–2011 zilustrowano na mapie 3. Z mapy 3 wyciągnąć można następujące wnioski:

- Najwyższym łącznym efektem grawitacyjnym¹² w latach 1999–2011 charakteryzowały się województwa¹³: mazowieckie (0,483), opolskie (0,383) oraz śląskie (0,362). Wysoka wartość owej cechy notowana była również w województwach: dolnośląskim (0,328), łódzkim (0,328) i wielkopolskim (0,308).

Mapa 3. Łączne efekty grawitacyjne w województwach w latach 1999–2011 (mln zł²/km²)



Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych na www.stat.gov.pl (Bank Danych Lokalnych) oraz <http://www.odleglosci.pl/odleglosci.php>.

¹¹ W przypadku województw lubuskiego i kujawsko-pomorskiego policzono średnią arytmetyczną z odległości stolicy każdego z tych województw od stolic pozostałych województw.

¹² Analizowane są tu jedynie wewnętrzne (względem gospodarki polskiej) efekty grawitacyjne. W analizach numerycznych w dalszej części opracowania uwzględniane będą również efekty zewnętrzne, wynikające z oddziaływania Berlina, jako stolicy Niemiec, na polskie regiony.

¹³ Efekty grawitacyjne wyrażone są w mln zł²/km².

- Niską zaś wartością łącznego efektu grawitacyjnego cechowały się województwa: warmińsko-mazurskie (0,201), pomorskie (0,198) oraz lubuskie (0,181). Najniższa siła łącznego efektu grawitacyjnego notowana była w położonych peryferyjnie województwach: lubelskim (0,164), podkarpackim (0,156), zachodniopomorskim (0,150) i podlaskim (0,136).

Kalibracja parametrów funkcji wydajności pracy

Z równania (1) wynika, że w czasie dyskretnym (dla $t = 1999, 2000, \dots, 2011$) w dowolnych dwóch województwach j, m ($j, m = 1, 2, \dots, 16$) zachodzą zależności:

$$\ln\left(\frac{y_{jt}}{y_{mt}}\right) = \alpha \ln\left(\frac{k_{jt}}{k_{mt}}\right) + \beta \ln\left(\frac{\bar{f}_{jt}}{\bar{f}_{mt}}\right). \quad (20)$$

Oszacowane MNK parametry równania (20) na danych statystycznych z Banku Danych Lokalnych GUS przedstawiają się następująco¹⁴:

$$\ln \frac{y_{jt}}{y_{mt}} = 0,939 \ln \frac{k_{jt}}{k_{mt}} + 0,0956 \ln \frac{\bar{f}_{jt}}{\bar{f}_{mt}},$$

(74,279) (14,089)

przy skor. $R^2 = 0,847$ i liczbie obserwacji 1560¹⁵. Oszacowanie parametru α było zbliżone do 1, co wydaje się być stanowczo zbyt wysoką wielkością (por. np. oszacowania owego parametru dla regionalnych lub lokalnych funkcji wydajności pracy w Polsce w pracach Tokarskiego [2005], Kwiatkowskiego i Tokarskiego [2009], Dykasa i Misiaka [2013] lub Mroczek i Tokarskiego [2013a])¹⁶. Dlatego też zdecydowano się na kalibrację powyższego parametru. Kalibracja ta była skutkiem tego, iż korzystając z danych przekrojowoczasowych dotyczących wydajności pracy i technicznego uzbrojenia pracy za lata 1999–2011, oszacowano parametry funkcji wydajności pracy, które przedstawiają się następująco¹⁷:

$$\ln y_{jt} = -35,580 + FE + 0,0184t + 0,622 \ln k_{jt},$$

(-21,524) (20,530) (16,411)

przy skor. $R^2 = 0,984$ oraz liczbie obserwacji 208. Wówczas równanie (20) z α skalibrowanym na poziomie 0,622 można zapisać następująco:

¹⁴ W nawiasach pod oszacowaniami parametrów podano statystyki t-Studenta. Skor. R^2 to skorygowany współczynnik determinacji.

¹⁵ W przypadku, w którym zmienną objaśnianą jest zmienna typu: $\ln\left(\frac{x_{jt}}{x_{mt}}\right)$, kolejne obserwacje dobierano dla $j = 1, 2, \dots, 16$ oraz $j < m \leq 16$. Daje to 120 obserwacji w każdym roku.

¹⁶ Parametr α na gruncie marginalnej teorii podziału Clarka można interpretować jako udział nakładów kapitałowych w produkcji. Gdyby zaś $\alpha = 0,939$, to $1 - \alpha = 0,061$, co oznaczałoby, iż udział nakładów pracy w produkcji wynosił jedynie 6,1%.

¹⁷ FE oznacza efekt dywersyfikacji stałej (*fixed effect*), t zaś – trend czasowy.

$$\ln \frac{y_{jt}}{y_{mt}} - 0,622 \ln \frac{k_{jt}}{k_{mt}} = \beta \ln \frac{\bar{f}_{jt}}{\bar{f}_{mt}}, \quad (21)$$

zaś jego oszacowania opisuje związek:

$$\ln \frac{y_{jt}}{y_{mt}} - 0,622 \ln \frac{k_{jt}}{k_{mt}} = 0,176 \ln \frac{\bar{f}_{jt}}{\bar{f}_{mt}}, \quad (22)$$

(24,876)

przy skor. $R^2 = 0,284$ i liczbie obserwacji 1560. Stąd w pierwszym etapie symulacji numerycznych przyjęto: $\alpha = 0,622$ oraz $\beta = 0,176$ ¹⁸.

Numeryczne rozwiązanie modelu

W oparciu o skalibrowane poprzednio parametry rozważanego tu modelu wzrostu gospodarczego dokonano symulacji numerycznych opisujących możliwe scenariusze zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw. Rozważono dwa warianty. W wariantcie 1. zakłada się, iż w długim okresie stopy inwestycji s_i w kolejnych województwach kształtować się będą na takim poziomie, jak miało to miejsce średnio w latach 1999–2011 (por. dane w kolumnie s_j w tabeli 1). Natomiast w wariantcie 2. przyjęto, iż stopy te będą w długim okresie równe sobie. Dodatkowo, dla uproszczenia obliczeń, przyjęto, że $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{16}$.

Celem wyznaczenia względnych wartości technicznego uzbrojenia pracy, efektu grawitacyjnego oraz wydajności pracy¹⁹, w poszczególnych województwach, w długookresowej równowadze wykorzystano następujące równania (wynikające z prezentowanego wcześniej modelu teoretycznego):

$$\frac{k_j^*}{k_M^*} = \exp \left(\frac{1}{1 - \alpha - \frac{N-2}{N-1}\beta} \left(\ln \left(\frac{s_j}{s_M} \right) - 2\beta \ln \left(\frac{\bar{d}_j}{\bar{d}_M} \right) \right) \right),$$

$$\frac{\bar{f}_j^*}{\bar{f}_M^*} = \exp \left(\frac{N-2}{N-1} \ln \left(\frac{k_j^*}{k_M^*} \right) - 2 \ln \left(\frac{\bar{d}_j}{\bar{d}_M} \right) \right)$$

¹⁸ Wówczas współczynnik korelacji Pearsona między $\ln \frac{y_{jt}}{y_{mt}}$ a $0,622 \ln \frac{k_{jt}}{k_{mt}} + 0,176 \ln \frac{\bar{f}_{jt}}{\bar{f}_{mt}}$ wynosił 0,901.

¹⁹ Przez względne wartości owych zmiennych makroekonomicznych rozumie się dalej relacje tych zmiennych w województwie j do wartości w województwie mazowieckim.

oraz:

$$\frac{y_j^*}{y_M^*} = \exp \left(\alpha \ln \left(\frac{k_j^*}{k_M^*} \right) + \beta \ln \left(\frac{\bar{f}_j^*}{\bar{f}_M^*} \right) \right),$$

gdzie subskrypty M odnoszą się do województwa mazowieckiego.

W tabeli 1 przedstawiono wyniki symulacji numerycznych polegających na wyznaczeniu względnego technicznego uzbrojenia pracy (rk_j^*), względnego łącznego efektu grawitacyjnego ($r\bar{f}_j^*$) oraz względnej wydajności pracy (ry_j^*) w długookresowej równowadze. Z symulacji tych płyną następujące wnioski:

- W wariancie 1. trzy województwa – łódzkie, świętokrzyskie i małopolskie – zmniejszyłyby swój dystans pod względem wydajności pracy do województwa mazowieckiego, natomiast pozostałych dwanaście województw – dystans ów by powiększyło.
- Zdecydowanie najwyższy wzrost wydajności pracy byłby zanotowany w województwie łódzkim (o 21,3 punktu procentowego, z 53,5% do 74,8% wydajności pracy w województwie mazowieckim), następnie w świętokrzyskim (o 5,4 punktu procentowego, z 48,2% do 53,6%), natomiast w województwie małopolskim wzrost względnej wydajności pracy wynosiłby jedynie 1,7 punktu procentowego (z 58,7% do 60,3%).
- W tym wariancie spadki względnej wydajności pracy w czterech województwach byłyby wyższe od 20 punktów procentowych a niższe od 30 punktów (województwa: kujawsko-pomorskie, warmińsko-mazurskie, opolskie i podlaskie), w trzech zaś województwa spadki te przekroczyłyby 30 punktów procentowych (pomorskie, śląskie oraz zachodniopomorskie). W województwie pomorskim względna wydajność pracy spadłaby o 33,3 punktu procentowego (z 77,8% do 44,5%), w śląskim o 33,8 punktu procentowego (z 80,6% do 46,7%), zaś w województwie zachodniopomorskim – aż o 51,7 punktu procentowego (z 73,6% do 21,9%).
- W tym wariancie nadal województwem o najwyższym poziomie wydajności pracy byłoby województwo mazowieckie, a do grupy kwartyłowej regionów o najwyższych wartościach owej zmiennej makroekonomicznej należałyby również województwa: dolnośląskie (75,8% wydajności pracy w województwie mazowieckim), łódzkie (74,8%) i małopolskie (60,3%). Natomiast grupa kwartyłowa o najniższym poziomie produkcji na pracującego złożona byłaby z województw: warmińsko-mazurskiego (34,1%), lubelskiego (26,1%), podlaskiego (25,7%) oraz zachodniopomorskiego (21,9%).

Tabela 1. Wyniki symulacji numerycznych na podstawie oszacowań parametrów równania (22)²⁰

Województwo	Lata 1999–2011					Wariant 1			Wariant 2	
	s_j [%]	rk_j^*	rf_j^*	ry_j^*	\bar{d}_j [km]	rk_j^*	rf_j^*	ry_j^*	$rk_j^* = ry_j^*$	rf_j^*
		województwo mazowieckie = 100				województwo mazowieckie = 100				
Dolnośląskie	16,54	74,57	67,98	77,74	269,36	72,12	65,79	75,81	91,07	81,80
Kujawsko-pomorskie	13,84	56,64	55,36	62,13	262,79	32,59	32,94	40,95	94,85	89,27
Lubelskie	13,21	48,49	33,98	42,42	311,21	19,85	14,79	26,13	71,79	49,08
Lubuskie	16,13	61,08	37,51	59,42	330,14	45,90	28,72	49,46	65,14	39,83
Łódzkie	15,25	51,39	67,85	53,50	226,46	65,58	85,18	74,78	121,19	151,09
Małopolskie	15,59	57,09	52,36	58,66	271,18	54,10	49,63	60,32	90,06	79,87
Mazowieckie	17,39	100,00	100,00	100,00	254,49	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
Opolskie	13,59	78,85	79,16	62,88	256,02	31,29	33,41	40,02	99,02	97,90
Podkarpackie	15,63	53,86	32,32	48,80	335,58	38,49	23,59	42,82	63,41	37,59
Podlaskie	14,31	59,24	28,09	51,15	376,48	21,11	10,70	25,65	52,47	25,03
Pomorskie	16,07	75,50	40,89	77,79	349,01	41,16	23,22	44,52	59,44	32,72
Śląskie	14,20	74,98	74,58	80,57	256,96	38,17	39,92	46,73	98,42	96,64
Świętokrzyskie	14,40	51,73	58,68	48,22	243,88	44,38	51,01	53,59	107,26	116,26
Warmińsko-mazurskie	14,27	61,20	41,40	56,88	314,21	28,00	19,99	34,13	70,67	47,44
Wielkopolskie	15,34	67,59	63,99	72,24	265,44	51,96	49,89	58,88	93,30	86,16
Zachodnio-pomorskie	14,21	78,55	31,04	73,57	408,54	17,86	7,77	21,85	45,86	18,74
Współczynnik zmienności	0,078	0,210	0,381	0,236	0,177	0,491	0,659	0,417	0,262	0,519

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych na www.stat.gov.pl (Bank Danych Lokalnych) oraz <http://www.odleglosci.pl/odleglosci.php>.

- Wariant 1. prowadziłby również do bardzo dużego pogłębienia przestrzennego zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw (mierzonego PKB na pracującego). Współczynnik zmienności dla względnej wydajności pracy wzrósłby bowiem z 0,236 do 0,417. Pogłębienie tych różnic wynikałoby stąd, że permanentne zróżnicowanie stop inwestycji (przy najwyższej wartości tej zmiennej w województwie mazowieckim) musiałoby prowadzić zarówno do pogłębienia się zróżnicowania technicznego uzbrojenia pracy (wzrost współczynnika zmienności z 0,210 do 0,491), jak i efektów grawitacyjnych (wzrost

²⁰ W wariacie 2. względne techniczne uzbrojenie pracy równe jest względnej wydajności

$$\text{pracy, gdyż przy } s_1 = s_2 = \dots = s_{16} \text{ zachodzą związki: } \ln \left(\frac{\tilde{f}_j^*}{\tilde{f}_m^*} \right) = - \frac{2(1-\alpha)}{1-\alpha - \frac{N-2}{N-1}\beta} \ln \left(\frac{\bar{d}_j}{\bar{d}_m} \right) \text{ oraz:}$$

$$\ln \left(\frac{k_j^*}{k_m^*} \right) = \ln \left(\frac{y_j^*}{y_m^*} \right) = - \frac{2\beta}{1-\alpha - \frac{N-2}{N-1}\beta} \ln \left(\frac{\bar{d}_j}{\bar{d}_m} \right).$$

analizowanego tu współczynnika z 0,381 do 0,659), czego skutkiem byłby właśnie wzrost zróżnicowania wydajności pracy.

- Natomiast w wariantcie 2., w którym występuje regionalna konwergencja po stronie stóp inwestycji, w trzynastu województwach wydajność pracy wzrosłaby w stosunku do wartości tej zmiennej makroekonomicznej w województwie mazowieckim, w dwóch zaś – pomorskim i zachodniopomorskim – wystąpiłby spadek względnej wydajności pracy.
- Największe przyrosty względnej wydajności pracy zanotowane byłyby wówczas w województwie łódzkim (o 67,7 punktu procentowego, z 53,5% do 121,2% wydajności pracy w województwie mazowieckim), następnie w województwach: świętokrzyskim o 59,0 punktu procentowego (z 48,2% do 107,3%), opolskim o 36,1 punktu (z 62,9% do 99,0%), kujawsko-pomorskim o 32,7 punktu (z 62,1% do 94,9%) oraz małopolskim o 31,4 punktu (z 58,7% do 90,1%). Ponadto względna wydajność pracy w województwie lubelskim wzrosłaby o 29,4 punktu procentowego, w wielkopolskim – o 21,1 punktu, śląskim – o 17,9 punktu, podkarpackim – o 14,6 punktu, warmińsko-mazurskim – o 13,8 punktu, dolnośląskim – o 13,3 punktu, lubuskim – o 5,7 punktu oraz podlaskim – o 1,3 punktu.
- Natomiast w województwie pomorskim względna wielkość produkcji na pracującego spadłaby wówczas o 18,4 punktu procentowego (z 77,8% do 59,4%) a w województwie zachodniopomorskim aż o 27,7 punktu procentowego (z 73,6% do 45,9%).
- W wariantcie 2. grupę kwartylową województw o najwyższej wydajności pracy tworzyłyby województwa: łódzkie (121,1% wydajności pracy województwa mazowieckiego), świętokrzyskie (107,3%), mazowieckie (100,0%) oraz opolskie (99,0%). Natomiast grupa kwartylowa o najniższych wartościach owej zmiennej złożona byłaby z województw: podkarpackiego (63,4%), pomorskiego (59,4%), podlaskiego (52,5%) i zachodniopomorskiego (45,9%).
- Wariant ten prowadziłby również do słabej dywergencji po stronie wydajności pracy, gdyż współczynnik zmienności owej zmiennej makroekonomicznej wzrósłby z 0,236 do 0,262.

Z prezentowanych tu wariantów względnych zmian wydajności pracy wynika, że do grupy województw o najwyższym poziomie wydajności pracy w długookresowej równowadze dołączyłyby centralnie położone województwa: łódzkie (w obu wariantach) i świętokrzyskie (w wariantcie 2.), zaś w grupie województw o niskim poziomie wydajności pracy znalazłyby się peryferyjnie położone (w stosunku do pozostałych polskich regionów) województwa zachodniopomorskie (w obu wariantach) oraz pomorskie (w wariantcie 2.). Scenariusze takie wydawałyby się prawdopodobne, gdyż województwa te (podobne jak regiony Polski wschodniej z wyjątkiem województwa świętokrzyskiego) są geograficznie rzecz biorąc regionami peryferyjnymi, gdyby nie to, że (po pierwsze) są to województwa nadmorskie z silnymi ośrodkami portowymi (Gdańsk, Gdynia, Świnoujście oraz Szczecin) oraz (po drugie) gospodarka polska – zwłaszcza po wejściu do UE w 2004 r. – znacznie bardziej otwarta jest na zachód, niż na wschód. Wynika stąd, że istotniej na rozwój poszczególnych województw może wpływać

geograficzna bliskość głównego polskiego partnera handlowego (Niemiec), niż bliskość granic innych sąsiadów Polski z UE (Czech, Słowacji i Litwy) oraz sąsiadów spoza UE (Ukrainy, Białorusi i Rosji).

Z tego też względu autorzy zdecydowali się na rozszerzenie funkcji wydajności pracy (1) o odległość stolicy poszczególnych województw od Berlina (ϕ_j). Wówczas równanie to można zapisać w czasie dyskretnym następująco²¹:

$$y_{jt} = \frac{\bar{f}_{jt}^\beta k_{jt}^\alpha}{\phi_j^{2\gamma}},$$

gdzie $\gamma > 0$. Po kilku przekształceniach powyższego równania dochodzi się zaś do związku:

$$\ln\left(\frac{y_{jt}}{y_{mt}}\right) - \alpha \ln\left(\frac{k_{jt}}{k_{mt}}\right) = \beta \ln\left(\frac{\bar{f}_{jt}}{\bar{f}_{mt}}\right) - 2\gamma \ln\left(\frac{\phi_j}{\phi_m}\right). \quad (23)$$

Oszacowane MNK parametry równania (23) przedstawiają się następująco:

$$\ln\left(\frac{y_{jt}}{y_{mt}}\right) - 0,622 \ln\left(\frac{k_{jt}}{k_{mt}}\right) = 0,175 \ln\left(\frac{\bar{f}_{jt}}{\bar{f}_{mt}}\right) - 0,0548 \ln\left(\frac{\phi_j^2}{\phi_m^2}\right),$$

przy: skor. $R^2 = 0,440$ i liczbie obserwacji 1560. Oszacowane parametry równania (23) stanowiły podstawę do kolejnych symulacji numerycznych przyszłego zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw w 1. i 2. wariantcie²². Jednak symulacje te nadal wydawały się niezadowolające z intuicyjnego punktu widzenia. Wynika to stąd, iż przy oszacowaniach parametrów równania (23) względna wydajność pracy w województwie zachodniopomorskim spadałaby w długookresowej równowadze do 70,1% wydajności pracy w województwie mazowieckim (w wariantcie 1.) oraz rosłaby do 146,5% owej wydajności (w wariantcie 2.), natomiast w województwie pomorskim wartość tej zmiennej makroekonomicznej spadałaby do 51,4% w wariantcie 1. oraz 68,5% w wariantcie 2. Wydaje się, że symulowane zmiany w wydajności pracy w województwie pomorskim wynikają stąd, iż województwo to jest województwem położonym względnie peryferyjnie zarówno wobec pozostałych polskich województw (średnia geometryczna z odległości od pozostałych województw wynosi 349,0 km), jak i od Berlina (odległość równa 489,0 km).

²¹ O ile wartość parametru β opisuje siłę oddziaływania wewnętrznych efektów grawitacyjnych na wydajność pracy w województwach, o tyle γ – siłę działania zewnętrznych efektów grawitacyjnych (w tym przypadku Berlina). Dlatego też należy się spodziewać, że $\gamma < \beta$.

²² Przy oszacowaniach parametrów równania (23) współczynnik korelacji Pearsona między

$\ln\left(\frac{y_{jt}}{y_{mt}}\right)$ a $0,622 \ln\left(\frac{k_{jt}}{k_{mt}}\right) + 0,175 \ln\left(\frac{\bar{f}_{jt}}{\bar{f}_{mt}}\right) - 0,0548 \ln\left(\frac{\phi_j^2}{\phi_m^2}\right)$ wynosił 0,916.

- Oba analizowane tu warianty prowadziłyby do pogłębienia procesów dywergencji międzyregionalnej, przy czym proces ten byłby znacznie silniejszy przy utrzymaniu się dotychczasowej regionalnej struktury stóp inwestycji (por. odpowiednie współczynniki zmienności względnych wydajności pracy).

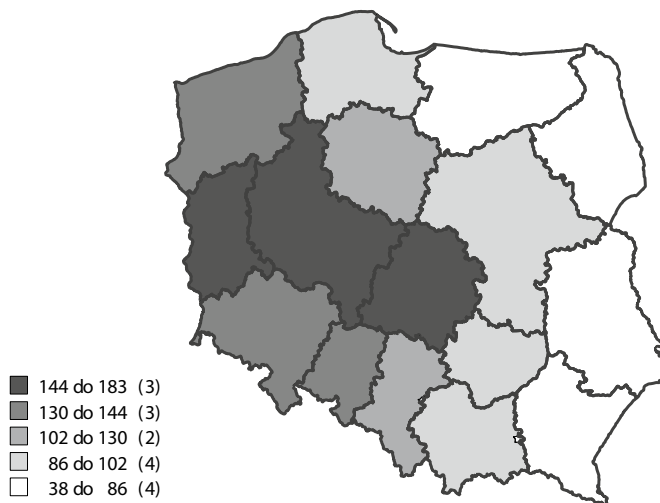
Tabela 2. Wyniki symulacji numerycznych na podstawie oszacowań parametrów równania (24)²⁴

Województwo	ϕ_j [km]	Wariant 1			Wariant 2		
		rk_j^*	$r\bar{f}_j^*$	ry_j^*	rk_j^*	$r\bar{f}_j^*$	ry_j^*
		województwo mazowieckie = 100					
Dolnośląskie	343,0	92,85	232,44	118,13	118,50	291,87	143,43
Kujawsko-pomorskie	412,5	36,77	71,13	52,21	112,36	201,75	126,97
Lubelskie	740,0	15,78	7,15	18,88	60,51	25,09	55,02
Lubuskie	226,5	70,77	275,39	107,72	102,06	387,58	144,14
Łódzkie	466,0	72,63	141,67	89,44	138,04	257,97	149,08
Małopolskie	595,0	51,24	43,76	56,34	87,31	71,96	86,10
Mazowieckie	573,0	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
Opolskie	422,0	34,90	68,20	50,02	116,41	209,92	130,43
Podkarpackie	772,0	30,60	10,49	30,47	51,58	17,08	46,16
Podlaskie	759,0	16,30	4,79	17,83	42,22	11,64	38,02
Pomorskie	489,0	50,12	46,05	68,89	73,61	65,93	93,53
Śląskie	520,0	38,42	48,78	48,78	103,47	122,95	107,27
Świętokrzyskie	612,0	41,46	41,97	48,86	104,34	99,31	101,81
Warmińsko-mazurskie	600,0	25,25	16,56	30,26	66,49	40,87	65,36
Wielkopolskie	270,0	74,96	316,34	112,39	138,25	560,11	182,90
Zachodnio-pomorskie	150,0	32,17	196,47	64,79	86,24	493,13	141,98
Współczynnik zmienności	0,377	0,530	0,996	0,522	0,308	0,931	0,389

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych na www.stat.gov.pl (Bank Danych Lokalnych) oraz <http://www.odleglosci.pl/odleglosci.php>.

²⁴ $r\bar{f}_j^*$ w tabeli 2 oznacza zarówno wewnętrzne, jak i zewnętrzne względne efekty grawitacyjne.

Mapa 5. Zróżnicowanie rozwoju ekonomicznego województw w wariantie 2. w długookresowej równowadze analizowanego modelu wzrostu (woj. mazowieckie = 100)



Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych na www.stat.gov.pl (Bank Danych Lokalnych) oraz <http://www.odleglosci.pl/odleglosci.php>.

- Natomiast w wariantie 2. (przy pełnej konwergencji regionalnych stóp inwestycji) zdecydowanie najwyższym poziomem wydajności pracy cieszyłoby się województwo wielkopolskie (182,9% wydajności pracy województwa mazowieckiego). W grupie regionów o najwyższym poziomie owej zmiennej makroekonomicznej znalazłyby się również województwa: łódzkie (149,1%) i lubuskie (144,1%). Grupę regionów o wysokim względnym poziomie owej zmiennej tworzyłyby województwa: dolnośląskie (143,4%), zachodniopomorskie (142,0%) oraz opolskie (130,4%). W tym wariantie województwo mazowieckie uplasowałoby się dopiero na 10. miejscu, należąc do województw o niskim produkcie na pracującego. W grupie województw o niskim poziomie wydajności, poza województwem mazowieckim, znalazłyby się również województwa: świętokrzyskie (101,8%), pomorskie (93,5%) i małopolskie (96,%). Natomiast grupa województw o najniższym względnym poziomie owej zmiennej makroekonomicznej złożona byłaby wówczas z czterech, peryferyjnych w Polsce oraz peryferyjnych względem Niemiec, województw Polski wschodniej: warmińsko-mazurskiego (65,4%), lubelskiego (52,0%), podkarpackiego (46,2%) i podlaskiego (38,0%).

Podsumowanie

Prowadzone w pracy rozważania można podsumować następująco:

- I. W analizowanym modelu wzrostu gospodarczego autorzy rozszerzają model Solowa o oddziaływanie efektu grawitacyjnego na procesy produkcyjne. W tym celu zakładają, że na wielkość wydajności pracy w poszczególnych

- regionach oddziałuje nie tylko wielkość zgromadzonego tam technicznego uzbrojenia pracy, lecz również łączne efekty grawitacyjne.
- II. Łączne efekty grawitacyjne mierzone są jako średnia geometryczna z jednostkowych efektów grawitacyjnych. Jednostkowe zaś efekty grawitacyjne są wprost proporcjonalne do iloczynu technicznego uzbrojenia pracy w dowolnych dwóch regionach i odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości pomiędzy tymi regionami.
 - III. Tak zadany model wzrostu gospodarczego ma jeden nietrywialny punkt stacjonarny, który charakteryzuje się asymptotyczną stabilnością. Dlatego też punkt ten można utożsamiać z punktem długookresowej równowagi rozważanego modelu wzrostu.
 - IV. Skalibrowane parametry modelu wzrostu z efektem grawitacyjnym w polskich województwach wskazują, iż elastyczność wydajności pracy względem technicznego uzbrojenia pracy wynosiła w latach 1999–2011 ok. 0,622, a względem łącznego efektu grawitacyjnego – ok. 0,176.
 - V. Najsilniejsze efekty grawitacyjne w analizowanym przedziale czasu notowane były mniej więcej w czworokącie łączącym Warszawę z Poznaniem, Wrocławiem oraz aglomeracją śląsko-dąbrowską lub (być może) Krakowem. Województwami peryferyjnymi, ze względu na siłę działania efektów grawitacyjnych, okazały się zarówno województwa Polski wschodniej (poza województwem świętokrzyskim, które leży względnie blisko kilku dużych aglomeracji miejskich), jak i województwa pomorskie, zachodniopomorskie oraz lubuskie.
 - VI. W symulacjach numerycznych badano oddziaływanie procesów akumulacji kapitału rzeczowego oraz oddziaływanie efektu grawitacyjnego na potencjalne zróżnicowanie rozwoju ekonomicznego województw (mierzone zróżnicowaniem wydajności pracy) w dwóch wariantach. Po pierwsze, w wariacie, w którym przestrzenna struktura stóp inwestycji będzie taka, jaką notowano w latach 1999–2011 oraz, po drugie, w wariacie, w którym nastąpi pełna konwergencja wojewódzkich stóp inwestycji.
 - VII. Zarówno, wariant 1., jak i 2. wskazują na to, że przestrzenne zróżnicowanie rozwoju ekonomicznego polskich województw może się istotnie pogłębiać, przy czym procesy dywergencyjne byłyby znacznie silniejsze przy utrzymaniu się dotychczasowej struktury stóp inwestycji. Co więcej, jeśli nie uwzględni się działania zewnętrznych efektów grawitacyjnych (związanych z oddziaływaniem na polskie województwa gospodarki niemieckiej) oraz portowego charakteru Trójmiasta, to okaże się, że województwami o niskim poziomie rozwoju ekonomicznego mogłyby zostać również województwa pomorskie i zachodniopomorskie oraz lubuskie.
 - VIII. Uwzględnienie jednak oddziaływania gospodarki niemieckiej i portowego charakteru Trójmiasta prowadzi do wniosku, że w obu rozważanych wariantach nastąpi polaryzacja rozwoju ekonomicznego polskich województw. Najlepiej rozwiniętymi polskimi regionami mogą zostać województwa wielkopolskie, dolnośląskie oraz lubuskie i łódzkie. Zwiększy się

- również dystans rozwojowy pomiędzy województwami Polski zachodniej i wschodniej (z wyjątkiem województwa świętokrzyskiego).
- IX. Ponieważ poziom zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw może się zwiększać, zatem wydaje się, że niezbędne są pewne elementy aktywnej polityki regionalnej w Polsce wschodniej. Do narzędzi owej polityki wydają się należeć przede wszystkim inwestycje w sferze infrastruktury transportowej, co może w jakiś sposób osłabić działanie niekorzystnych tam efektów grawitacyjnych.

Bibliografia

- Dykas P., Edigarian A., Tokarski T. [2010], *Uogólnienie N-kapitałowego modelu wzrostu gospodarczego Nonnemana-Vanhoudta*, w: E. Panek, (red.), *Wzrost gospodarczy. Teoria. Rzeczywistość*, „Zeszyty Naukowe” nr 176, Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Dykas P., Misiak T. [2013], *Determinanty przestrzennego zróżnicowania wybranych zmiennych makroekonomicznych*, w: M. Trojak, T. Tokarski (red.), *Statystyczna analiza zróżnicowania rozwoju ekonomicznego i społecznego Polski*, Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Dykas P., Sulima A., Tokarski T. [2008], *Złote reguły akumulacji kapitału w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa” nr 11–12.
- Englman F.C., Walz U. [1995], *Industrial centers and regional growth in the presence of local inputs*, „Journal of Regional Science” Vol. 3.
- Krugman P. [1979], *Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International Trade*, „Journal of International Economics” No. 9(4).
- Krugman P., Venables A.J. [1995], *Globalization and the Inequality of Nations*, „Quarterly Journal of Economics” Vol. 110, No. 4.
- Kwiatkowski E., Tokarski T. [2009], *Determinanty przestrzennego zróżnicowania wydajności pracy*, „Wiadomości Statystyczne” nr 10.
- Linnemann H. [1963], *An Econometric Study of International Trade Flows*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Lucas R.E. [1988], *On the Mechanics of Economic Development*, „Journal of Monetary Economics” July.
- Lucas R.E. [2010], *Wykłady z teorii wzrostu gospodarczego*, Wyd. C.H. Beck, Warszawa 2010.
- Malaga K., Kliber P. [2007], *Konwergencja i nierówności regionalne w Polsce w świetle neoklasycznych modeli wzrostu*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N. [1992], *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics” May.
- Martin P., Ottaviano G. [2001] *Growth and Agglomeration*, „International Economic Review” No. 42.
- Mroczek K., Tokarski T. [2013a], *Przestrzenne zróżnicowanie technicznego uzbrojenia pracy, wydajności pracy i łącznej produktywności czynników produkcji w Polsce w latach 1995–2009*, „Studia Prawno-Ekonomiczne” t. LXXXVIII, Łódzkie Towarzystwo Naukowe, Łódź.
- Mroczek K., Tokarski T. [2013b], *Regionalne zróżnicowanie kapitału ludzkiego w Polsce*, „Studia Prawno-Ekonomiczne”, t. 89, Łódzkie Towarzystwo Naukowe, Łódź.

- Nonneman W., Vanhoudt P. [1996], *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries*, „Quarterly Journal of Economics” August.
- Ombach J. [1999], *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo – Maple*, Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Panek E. (red.) [2010], *Wzrost gospodarczy. Teoria. Rzeczywistość*, „Zeszyty Naukowe” nr 176, Wyd. Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Pöyhönen K. [1963], *Towards a General Theory of International Trade*, „Ekonomiska Samfundet Tidskrift” No. 16.
- Puga D. [1998], *Urbanization patterns: European versus less developed countries*, „Journal of Regional Science” No. 38.
- Puga D., Venables A.J. [1996], *The spread of Industry: spatial agglomeration in economic development*, CEPR Discussion Paper No. 279.
- Pulliainen K. [1963], *A World Trade Study. An Econometric Model of the Pattern of Commodity Flows in International Trade in 1948–1960*, „Ekonomiska Samfundet Tidskrift” No. 2.
- Ramsey F. [1928], *A Mathematical Theory of Saving*, „Economic Journal” December.
- Romer P.M. [1986], *Increasing Returns and Long-Run Growth*, „Journal of Political Economy” October.
- Romer P.M. [1990], *Endogenous Technological Change*, „Journal of Political Economy” October.
- Solow R.M. [1956], *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics” February.
- Tinbergen J. [1962], *Shaping the World Economy: Suggestions for an International Economic Policy*, New York, The Twentieth Century Fund.
- Tokarski T. [2005], *Statystyczna analiza regionalnego zróżnicowania wydajności pracy, zatrudnienia i bezrobocia w Polsce*, Wyd. Polskiego Towarzystwa Ekonomicznego, Warszawa.
- Tokarski T. [2009], *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujęcie neoklasyczne)*, Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Tokarski T. [2011], *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*, Polskie Wyd. Ekonomiczne, Warszawa.
- Trojak M., Tokarski T. (red.) [2013], *Statystyczna analiza zróżnicowania rozwoju ekonomicznego i społecznego Polski*, Wyd. Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Venables A.J. [1996], *Equilibrium locations of vertically linked industries*, „International Economic Review” No. 37.
- Żółtowska E. [1997], *Funkcja produkcji. Teoria, estymacja, zastosowania*, Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

GRAVITY MODEL OF THE ECONOMIC DIVERSITY OF POLISH REGIONS

Summary

The paper seeks to explain the influence of the so-called gravity effect on the regional diversity of economic growth in Poland.

The gravity effect, which is a reference to Newton's gravity law, is based on the assumption that regions have some economic influence on one another. The strength of these relationships is proportional to the size of the regional economies and inversely proportional to the distance between them. The applied model of economic growth refers to the neo-classical models of Solow; Mankiw, Romer and Weil; and Nonneman and Vanhoud. The presented model takes into account the gravity effect. The model has one non-trivial stationary point that is asymptotically stable, the authors say, which means that this point is a long-run economic equilibrium point.

The paper examines the regional diversity of various macroeconomic indicators in the period from 1999 to 2011. Additionally, parameters of the labor productivity function are estimated at the regional level.

The research yielded numerical simulations of two possible scenarios of the economic diversity of Polish regions. In the first scenario, it is assumed that investment rates are different in different regions (mean rates for each region from past periods). In the second scenario, the investment rates are the same for all regions. Both scenarios seem to indicate that the regional diversification of economic growth in Polish regions may decrease significantly, but the process of divergence was stronger under the regime imposed in the first scenario, the authors say.

The strongest gravity effects were observed in an area bounded by the cities of Warsaw, Poznań and Wrocław as well as the southern Silesia region, with the possible inclusion of the city of Cracow. Peripheral regions in terms of the gravity effect, according to the authors, are provinces in eastern Poland as well as Świętokrzyskie in the center of the country, Pomorskie and Zachodniopomorskie in the north, and Lubuskie in the west.

Keywords: economic growth, gravity effect, regional diversity

JEL classification codes: R11, E23, O47
