GOSPODARKA NARODOWA

4 (260) Rok LXXX/XXI kwiecień 2013 s. 109-130

Antoni CHRZONSTOWSKI*

Efekt Laffera w ubezpieczeniach emerytalnych

Streszczenie: Celem artykułu jest stworzenie matematycznego modelu zależności w obrębie ubezpieczeń emerytalnych, ze szczególnym uwzględnieniem systemu repartycyjno-kapitałowego, z którym mamy do czynienia w Polsce po reformie z 1999 r. W modelowaniu ekonometrycznym, jakie przeprowadzono w artykule, wykorzystane zostały założenia neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego, zwłaszcza modelu łączonego z dorobkiem naukowym Petera Diamonda, przyjmującego podział życia każdego człowieka na dwa zasadnicze okresy: pierwszy, wiążący się z pracą zawodową i drugi, związany z okresem rentierskim (emerytalnym). Otrzymane analityczne rozwiązanie łączy podstawowe wartości ekonomiczne, które mają wpływ na funkcjonowanie systemu emerytalnego. Zasadnicze równanie modelu, przy odpowiednich założeniach, redukuje się do formuły matematycznej opisującej system repartycyjny, przy innych zaś – do formuły opisującej system kapitałowy. W celu znalezienia wskazanego wyżej równania modelu zastosowano znane w literaturze przybliżenie wykorzystywanych w artykule formuł matematycznych. W następnym kroku otrzymany model zastosowano do pokazania możliwości występowania w gospodarce, w powiązaniu z ekonomią emerytalną, efektu Laffera. Znaleziono rozwiązanie analityczne, które obejmuje podstawowe parametry ekonomiczne wpływające na funkcjonowanie mieszanego systemu emerytalnego (repartycyjno-kapitałowego) i wskazuje na możliwość wystąpienia makroekonomicznej krzywej Laffera w gospodarce. Możliwość tę badano w odniesieniu do podstawowego bodźca wzrostu gospodarczego, jakim jest produkt stanowiący wynagrodzenie czynników wytwórczych: kapitału i pracy. Artykuł potwierdza możliwość wystąpienia efektu Laffera, wskazując na swoiste optimum pojawiające się w każdej gospodarce, która zawiera zinstytucjonalizowany system emerytalny. Występowanie takiego maksymalnego punktu efektywności systemu gospodarczego powinno skłaniać polityków gospodarczych, poszukujących trwałej ścieżki zrównoważonego wzrostu, do uwzględniania tego optimum.

Słowa kluczowe: sysetem emerytalny, repartycyjny system emerytalny, kapitałowy system emerytalny, krzywa Laffera

Kody JEL: C29, E61, H55, J19, O17

Artykuł wpłynął do druku 16 lutego 2013 r.

* Uczestnik seminarium doktoranckiego w Katedrze Międzynarodowych Stosunków Gospodarczych Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego im. Jana Pawła II. Autor posiada bogate doświadczenie w sprzedaży programów emerytalnych, e-mail: tonich@op.pl

Wstęp

W niniejszym artykule została podjęta próba uchwycenia zależności w obszarze ekonomii emerytalnej w systemie mieszanym (repartycyjno-kapitałowym) przy pomocy formuł matematycznych, pozwalających m. in. na potwierdzenie w oparciu o równania analityczne przewidywanego intuicyjnie przez innych autorów efektu Laffera w gospodarce, której integralną częścią jest system emerytalny[1]. Przedstawione podejście wykorzystuje założenia neoklasycznych modeli wzrostu i wprowadza model matematyczny, łączący w jednym równaniu produkt społeczny, jaki pokolenie czynne zawodowo przeznacza na wypłaty emerytur, z ilością emerytów oraz wielkością zgromadzonych przez nich kapitałów, będących podstawą ich zabezpieczenia w okresie emerytalnym. Wspomniana zależność, bez względu na matematyczne modelowanie, jakie posłuży jej przybliżonemu ustaleniu, jest realną funkcją gospodarczych i demograficznych relacji, mających zasadnicze znaczenie w odniesieniu do równowagi systemu oraz rzeczywistej wyceny annuitetów[2].

Wprawdzie dychotomia: system *PAYGO* (repartycyjny) a system kapitałowy, nie wyczerpuje zagadnień związanych z rozwiązaniami w obszarze ekonomii emerytalnej (por. [Góra, Palmer, 2002], [Góra, 2003b])[3], to jednak uwzględnianie w niniejszym artykule jedynie tych rozwiązań podyktowane jest w dużej mierze przesłanką, że przejście od modelu pierwszego do drugiego przedstawiano (zwłaszcza w latach 90. XX w.) jako nieuchronną konieczność i stadium docelowe we współczesnych, starzejących się społeczeństwach Europy (por. [Świerczyńska, 2007, s. 246]). Obydwa systemy stanowią niejako wersje skrajne możliwych rozwiązań, zinstytucjonalizowanych w oparciu o prawo normatywne poszczególnych gospodarek krajowych.

Gromadzenie kapitału z myślą o zabezpieczeniu się na okres emerytalny (rentierski), w odniesieniu do tzw. III filaru w Polsce, a – innymi słowy – w odniesieniu do indywidualnej zapobiegliwości obywateli, docenianej od dawna w gospodarkach państw bogatych – nie musi przyjmować form związanych

---

1 Inspirującą w tym zakresie jest opinia Marka Góry: „Im większy udział części PKB przeznaczonej na konsumpcję emerytów, tym mniejsza część pozostaje. Jest ona przeznaczana na opłacenie czynników produkcji, co w konsekwencji prowadzi do zmniejszenia ich zaangażowania w procesie produkcji, a przez to do zmniejszenia tempa wzrostu PKB". W przypisie zaś do zacytowanego fragmentu wskazany autor zaznaczył, że można w tym względzie „wysnuć pewną analogię do krzywej Laffera" [Góra, 2003a, s. 484-485].

2 Zachęcając klientów do założenia programu oszczędnościowego z myślą o przyszłej emeryturze – już to w II filarze (wcześniej), już to w III filarze (aktualnie) – trudno było pomijać refleksje natury teoretycznej. Do różnych bowiem ustaleń teoretycznych odwołują się dosyć wybiórczo wszelkie programy szkoleniowe mające na celu podnoszenie efektywności sprzedaży.

3 W literaturze przedmiotu autorzy wyróżniają cztery podstawowe systemy emerytalne: 1) niefinansowy o zdefiniowanym świadczeniu, 2) niefinansowy o zdefiniowanej składce, 3) finansowy o zdefiniowanym świadczeniu, 4) finansowy o zdefiniowanej składce (zob. np. [Świerczyńska, 2007], szerzej o tym w: [Góra, Palmer, 2002]).

jedynie z rynkami finansowymi[4]. Podkreślenie we wstępie tego faktu ma na celu ukazanie, że mówiąc o kapitałach stanowiących zabezpieczenie rentierom (emerytom) wypłat pieniężnych, nie musimy mieć na uwadze tylko kapitału w ujęciu finansowym, lecz także kapitał w sensie ekonomicznym, rozumiany jako składniki majątkowe (aktywa rzeczowe), dające się wykorzystywać gospodarczo lub spieniężyć dzięki rynkowej wycenie i przekształcić w walutę równie dobrze jak instrumenty typowo finansowe.

Przesłanki z modeli wzrostu

W niektórych modelach wzrostu gospodarczego, np. w modelu łączonym z dorobkiem naukowym amerykańskiego ekonomisty Petera Diamonda, zakłada się, że życie każdego człowieka, z ekonomicznego punktu widzenia, możemy podzielić na dwa zasadnicze okresy[5]: t oraz $t + 1$. Każda jednostka żyje tylko przez te dwa okresy, z których t oznacza przedział czasu związany z aktywnością zawodową, zaś $t + 1$ to okres rentierski, w tym – okres emerytalny, który często bywa nazywany okresem poprodukcyjnym[6].

Młodzi ludzie, aktywni zawodowo, dzielą swoje dochody z pracy między konsumpcję i oszczędności, które są odroczoną konsumpcją, pozwalającą na maksymalizowanie użyteczności w obydwu okresach, tj. t i $t + 1$. Produkt zaś jest wytwarzany łącznie – przez siłę roboczą młodych i kapitał stanowiący własność starszego pokolenia. Podział dochodu między kapitał i siłę roboczą następuje według produktów krańcowych kapitału i pracy. Pokolenie starszych (rentierów) konsumuje zarówno swój dochód z kapitału jak i swój istniejący majątek, po czym umiera (opuszcza model). Młodzi natomiast swoje oszczędności przenoszą na następny okres. Kapitał ich łączy się w końcu z siłą roboczą dostarczaną przez następne pokolenie jednostek młodych i w ten sposób proces odtwarza się i ciągle powiela.

W neoklasycznych modelach wzrostu, przyjmowane jest założenie, że krańcowy produkt kapitału jest wielkością stałą, czyli funkcja produkcji wykazuje

4 W Polsce np. coraz częściej możemy usłyszeć o tzw. „odwróconej hipotece", która tworzy instrument finansowy, gdzie zabezpieczeniem wypłat pieniężnych może być nieruchomość, którą w przyszłości przejmie na własność instytucja finansowa (np. bank). Do czasu zaś przejęcia takiej nieruchomości instytucja finansowa wypłaca właścicielowi środki pieniężne w miesięcznych ratach, które – będąc rozłożoną w czasie zapłatą – mogą stanowić pewien rodzaj świadczenia emerytalnego.

5 W potocznym przeświadczeniu życie jednostki ludzkiej w społeczeństwie dzieli się na trzy zasadnicze okresy: $t - 1$, t, $t + 1$, gdzie $t - 1$ to czas dzieciństwa i nauki szkolnej, kiedy człowiek nie osiąga jeszcze dochodów, ale dzięki zdobywanemu wykształceniu wpływa na przyszłe dochody w czasie aktywności zawodowej t oraz w okresie rentierskim $t + 1$.

6 Zwrot „poprodukcyjny" łatwo może być kojarzony z pejoratywnym – „niepotrzebny". Produkcyjnym (w sensie dokładania się do wytworzenia PKB) można być nie tylko poprzez pracę własną, ale także poprzez udostępnianie wiedzy i zgromadzonych funduszy (zob. [Balicki, 2006, s. 47]). Rentier jest człowiekiem jak najbardziej produkcyjnym; w kapitałowym systemie emerytalnym jednostki ludzkie są produkcyjne do końca swoich dni; wynika to wprost z założeń modelu Diamonda.

stałe efekty skali (por. [Romer, 2000, s. 26-27]), oznaczające równość krańcowej i średniej produktywności kapitału:

$$c = \frac{dY}{dK} = \frac{Y}{K} \tag{1}$$

Kapitał w okresie $t + 1$, tj. K_{t+1}, równa się liczbie młodych jednostek pracujących w okresie t, czyli L_t, pomnożonej przez oszczędności każdej z tych jednostek. Wyraża to formuła:

$$K_{t+1} = s(r_{t+1}) L_t A_t w_t \tag{2}$$

gdzie $s(r_{t+1})$ oznacza oszczędzaną w okresie t część dochodu, zależną jednakże od przyszłej, oczekiwanej przez jednostki stopy przychodu z kapitału, stąd we wzorze na zasób kapitału w okresie $t + 1$ występuje realna stopa procentowa r z okresu $t + 1$, zaś w_t pochodzi z okresu t i oznacza przeciętną płacę, przypadającą na jednostkę efektywnej pracy, a wielkość A_t przedstawia wiedzę, którą dysponuje w okresie t pokolenie pracujących. Ponadto zachodzą związki: $L_{t+1} = (1 + n) L_t$ oraz $A_{t+1} = (1 + g) A_t$, gdzie n to stopa przyrostu naturalnego, zaś g oznacza stopę przyrostu wiedzy.

Założenia związane z prowadzonym modelowaniem

Suma wypłacanych w gospodarce emerytur jest wprost proporcjonalna do liczby rentierów (emerytów) w okresie $t + 1$:

$$R_{Et+1} = r_{Et+1} N_{Et+1} \tag{3}$$

gdzie R_{Et+1} oznacza ową sumę wypłaconą w gospodarce wszystkim emerytom w ciągu roku, r_{Et+1} stanowi przeciętną, pieniężną wartość pojedynczego świadczenia (pojedynczej, średniej w skali roku, wypłaty), zaś N_{Et+1} – to liczba rentierów (emerytów) w okresie $t + 1$. Z drugiej strony – suma wypłaconych w gospodarce świadczeń emerytalnych odpowiada dokładnie tej części PKB, wytwarzanego w okresie $t + 1$, który służy spłaceniu zobowiązania wobec pokolenia rentierów, czyli

$$R_{Et+1} = P_{t+1} Y_{Et+1} \tag{4}$$

gdzie P_{t+1} oznacza ogólny poziom cen w okresie $t + 1$, zaś Y_{Et+1} stanowi tę część produktu krajowego, która w $t + 1$ zostaje przeznaczona na wypłaty emerytury. Zachodzi więc tożsamość:

$$r_{Et+1} N_{Et+1} = P_{t+1} Y_{Et+1} \rightarrow \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} = \frac{Y_{Et+1}}{N_{Et+1}} \tag{5}$$

Polskie rozwiązanie emerytalne po roku 1999 tworzy systemem mieszany, repartycyjno-kapitałowy[7]. Przez repartycyjny system emerytalny rozumiemy rozwiązanie opierające się na założeniu, że pracująca część społeczeństwa bierze na siebie utrzymanie wszystkich emerytów. Osoby pracujące opłacają składki, które następnie, za pośrednictwem wyspecjalizowanych, państwowych organów administracji, są przeznaczane na finansowanie bieżących emerytur.

System kapitałowy zaś polega na tym, że pokolenie pracujących część swoich dochodów, osiąganych w okresie działalności zawodowej, przeznacza na zakup różnego rodzaju aktywów (nabywanych indywidualnie lub – w przypadku instrumentów finansowych – nabywanych także za pośrednictwem funduszy inwestycyjnych, w tym również ubezpieczycieli i funduszy emerytalnych). Zgromadzone w ten sposób aktywa w przyszłości będą zamieniane na strumienie pieniężne, które w podziale na roczne i miesięczne okresy wypłat będą stanowiły świadczenia emerytalne.

System mieszany natomiast zakłada kombinację obydwu, wyżej wskazanych, gdzie część repartycyjna jest odprowadzana obligatoryjnie, zaś autentyczna część kapitałowa powinna powstać w drodze indywidualnych oszczędności w miarę posiadanych dochodów i ich inwestowania (indywidualnie lub z udziałem instytucji pośredniczących) w różnego rodzaju składniki majątkowe lub instrumenty finansowe.

Zatem przeciętną, roczną sumę wszystkich annuitetów, możemy ogólnie wyrazić za pomocą formuły algebraicznej:

$$R_{Et+1} = R_{Zt+1} + R_{Kt+1} \tag{6}$$

gdzie R_{Et+1}, dokładnie jak w równaniach (3) i (4), oznacza sumę rocznych wypłat emerytalnych, pochodzącą z obydwu komponentów systemu; R_{Zt+1} – wartość średnich rocznych wypłat z obowiązkowej części repartycyjnej, czyli – w przypadku polskiego rozwiązania – z Funduszu Ubezpieczeń Społecznych, którym zarządza ZUS, prowadząc zapisy środków wpłacanych (przepływających przez indywidualne konto rozliczeniowe ubezpieczonych); R_{Kt+1} to przeciętne, roczne wypłaty z części kapitałowej systemu (polski III filar, powstający z dobrowolnych oszczędności jednostek, najbardziej odpowiadający założeniom neoklasycznych modeli wzrostu).

Dalsze założenia

Na zgromadzony w okresie t kapitał może być różne zapotrzebowanie w okresie $t + 1$. Niech pożądana w okresie $t + 1$ wielkość kapitału wynosi

[7] Przyjmuję za Dzierżawskim, że mówienie w odniesieniu do I filaru polskiego systemu emerytalnego, jako o rozwiązaniu kapitałowym, jest nieadekwatne. „Rzecz w tym, że kapitał ten pojawia się na koncie tylko na mgnienie oka. W następnej chwili zostaje bowiem przeznaczony na wypłatę bieżących świadczeń emerytalnych i przez rzeszę emerytów jest raz na zawsze nieodwołalnie skonsumowany" [Dzierżawski, 2006, s. 159].

K^*_{t+1}, zaś zgromadzona przez pracujących w okresie t ilość kapitału, wyrażona wzorem (2), wynosi K_{t+1}. Przez κ oznaczamy współczynnik dopasowania, który wyrazić można ilorazem:

$$\kappa = \frac{K^*_{t+1}}{K_{t+1}} \tag{7}$$

Przy czym $\kappa > 1$ oznacza większe zapotrzebowanie (większy popyt) na kapitał w okresie $t + 1$ niż jego ilość zgromadzona w okresie t, zaś $\kappa < 1$ oznacza zapotrzebowanie mniejsze niż zgromadzona podczas okresu t wielkość kapitału, posiadana przez pokolenie starszych w ich okresie rentierskim $t + 1$. Od popytu na kapitał zgromadzony m.in. zależeć będzie wartość realna annuitetów.

Zakładamy ponadto, że najbardziej prawdopodobnym sposobem wypłat (podstawą annuitetu) będą równe, roczne raty z podziałem na miesiące[8]. Ową prostotę i klarowność formuły emerytalnej w polskim i szwedzkim systemie zauważa i podkreśla Świerczyńska. Przyszłe świadczenie emerytalne wyraża się po prostu wzorem: $E = K/G$, gdzie K – kapitał zgromadzony w ciągu kariery zawodowej, zaś G to średnie, dalsze trwanie życia w momencie przejścia na emeryturę [Świerczyńska, 2007, s. 243].

Rozwinięcie prawej strony równości (6) możemy dokonać za pomocą formuły matematycznej przyjmowanej do obliczenia rocznej spłaty zaciągniętego kredytu, zwracanego pośrednikom finansowym w równych ratach:

$$R = K \cdot \frac{r(1+r)^m}{(1+r)^m - 1} \tag{8a}$$

gdzie R oznacza roczną ratę spłaty kredytu K wraz z odsetkami, przy realnej stopie procentowej r w ciągu m rocznych okresów. Zatem formułę (6) przy pomocy wzoru (8a) rozwijamy do postaci:

$$R_{Et+1} = Z \cdot \frac{r^*_{t+1}\left(1 + r^*_{t+1}\right)^m}{\left(1 + r^*_{t+1}\right)^m - 1} + P_{t+1}K^*_{t+1} \cdot \frac{r_{t+1}(1 + r_{t+1})^m}{(1 + r_{t+1})^m - 1} \tag{8b}$$

W równaniu (8b) R_{Et+1} oznacza, jak w (6), przeciętną sumę rocznych wypłat emerytalnych; Z – to zwaloryzowana przez dopisanie ustawowych odsetek wartość zapisów na kontach ZUS; K^*_{t+1} oznacza kapitał, na jaki będzie zapotrzebowanie w okresie $t + 1$, a nie kapitał zgromadzony K_{t+1}. Natomiast P_{t+1} przedstawia przeciętny poziom cen w okresie $t + 1$. Parametr m uwzględnia ilość rat (ilość okresów, np. 15 lat), z którymi wiąże się wypłata całego kapitału i zgromadzonych odsetek; r_{t+1} to realna stopa procentowa, jaka będzie obowiązywać podczas okresu $t + 1$, kiedy następować będą sukcesywne wypłaty ze zgromadzonego kapitału (gdy kapitał razem z odsetkami będzie „zwracany"

---

8 Całą złożoność ekonomiczną adekwatnej kalkulacji annuitetów, w szczególności z podziałem na płeć beneficjentów – zob. np. Lewandowski [2005].

rentierom w równych ratach); r^*_{t+1} – to realna stopa waloryzacji od części zarejestrowanej w ZUS.

Podstawiając do równania (8) w miejsce R_{Et+1} formułę (3) i dzieląc obustronnie te równanie przez liczbę beneficjentów N_{Et+1}, czyli przez liczbę emerytów (rentierów) w okresie $t + 1$, otrzymujemy wyrażenie na wartość r_{Et+1}, czyli wartość przeciętnego, pojedynczego świadczenia (pojedynczej, średniej w skali roku, wypłaty emerytalnej):

$$r_{Et+1} = \frac{Z}{N_{Et+1}} \cdot \frac{r^*_{t+1}\left(1 + r^*_{t+1}\right)^m}{\left(1 + r^*_{t+1}\right)^m - 1} + \frac{P_{t+1}K^*_{t+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{r_{t+1}\left(1 + r_{t+1}\right)^m}{\left(1 + r_{t+1}\right)^m - 1} \tag{9}$$

Przyszły produkt, podobnie jak bieżący, będzie dzielony na część służącą opłaceniu pracy pokolenia czynnego zawodowo oraz część związaną ze świadczeniami emerytalnymi wypłacanymi z obydwu komponentów systemu. Podział ten – podział wytwarzanego PKB – możemy więc zapisać równaniem:

$$Y_{t+1} = Y_{Lt+1} + Y_{Et+1} \tag{10}$$

gdzie Y_{t+1} oznacza wytwarzany w gospodarce w okresie $t + 1$ produkt, zaś Y_{Lt+1} i Y_{Et+1} oznaczają części tego produktu przypadające, odpowiednio, opłaceniu pracy efektywnej pokolenia aktywnego zawodowo (Y_{Lt+1}) oraz przeznaczanego na wypłaty świadczeń emerytalnych (Y_{Et+1}). W systemie kapitałowym część Y_{Et+1} możemy również traktować jako opłacanie czynnika produkcji, którym jest kapitał udostępniany odpłatnie pokoleniu młodszemu przez pokolenie starszych (por. [Góra, 2003a, s. 492]). Zatem, biorąc pod uwagę obydwa komponenty mieszanego systemu emerytalnego, wielkość produktu, Y_{Et+1}, otrzymywaną przez pokolenie emerytów (rentierów) możemy podzielić na dwie składowe:

$$Y_{Et+1} = Y_{Zt+1} + Y_{Kt+1} \tag{11}$$

gdzie Y_{Zt+1} oznacza część produktu przeznaczaną w systemie na wypłaty emerytur z I filaru; Y_{Kt+1} – część produktu przeznaczaną przez młodych na opłacenie czynnika wytwórczego, jakim jest kapitał posiadany przez rentierów, udostępniany odpłatnie młodszemu pokoleniu.

Podział bieżącego PKB między pokolenia możemy także wyrazić za pomocą ilorazu:

$$\mu = \frac{Y_{Et+1}}{Y_{t+1}} \tag{12}$$

Wówczas wskaźnik μ daje się zinterpretować jako skłonność danego społeczeństwa do przeznaczania określonej części aktualnego produktu na utrzymanie pokolenia emerytów w formie wypłaty świadczeń (w przypadku systemu repartycyjnego) albo wykupu aktywów emerytalnych, czy wreszcie nabywania od pokolenia osób starszych zgromadzonego przez nich kapitału (w przypadku systemów kapitałowych). Formułę (12) możemy rozpisać w następujący sposób:

$$\mu = \frac{Y_{Et+1}}{Y_{t+1}} = \frac{Y_{Zt+1} + Y_{Kt+1}}{Y_{t+1}} = \frac{Y_{Z+1}}{Y_{t+1}} + \frac{Y_{Kt+1}}{Y_{t+1}} = \mu_1 + \mu_2 \tag{13}$$

W systemie mieszanym wskaźnik μ możemy więc podzielić na dwie składowe, których μ jest sumą: $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Wówczas μ_1 oznacza tę część bieżącego produktu, która jest re-dystrybuowana w obszarze repartycyjnym systemu, zaś μ_2 – część, za którą młodsze pokolenie wykupuje emerytalne aktywa lub za którą kupuje od starszego pokolenia kapitały.

Wielkość Z, oznaczająca zobowiązanie państwa w okresie $t + 1$ związane z repartycyjnym komponentem systemu, pokrywana będzie z wytwarzanego i re-dystrybuowanego na bieżąco w okresie $t + 1$ produktu krajowego. Możemy zatem przyjąć równość: $Z = P_{t+1} \cdot Y_{Zt+1}$. Biorąc więc pod uwagę tę zależność oraz korzystając z (7), równanie (9) możemy zapisać z uwzględnieniem wartości kapitału zgromadzonego i produktu przeznaczanego na wypłaty świadczeń emerytalnych w części repartycyjnej:

$$r_{Et+1} = \frac{P_{t+1} Y_{Zt+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{r^*_{t+1}\left(1 + r^*_{t+1}\right)^m}{\left(1 + r^*_{t+1}\right)^m - 1} + \frac{\kappa P_{t+1} K_{t+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{r_{t+1}\left(1 + r_{t+1}\right)^m}{\left(1 + r_{t+1}\right)^m - 1} \tag{14}$$

Z drugiej strony, podążając za intuicją Dzierżawskiego[9], przeciętne świadczenie emerytalne możemy zdefiniować w kategoriach krańcowych:

$$r_{Et+1} = \lim_{\substack{\Delta N \to 0 \\ Et+1}} \frac{\Delta\left(P_{t+1} Y_{Et+1}\right)}{\Delta N_{Et+1}} = P_{t+1} \lim_{\substack{\Delta N \to 0 \\ Et+1}} \frac{\Delta Y_{E+1}}{\Delta N_{Et+1}} = P_{t+1} \frac{dY_{Et+1}}{dN_{Et+1}} \tag{15}$$

gdzie wielkość Y_{Et+1} oznacza część produktu, która w okresie $t + 1$ będzie przeznaczana na spłatę zobowiązań wobec pokolenia starszych oraz zakup kapitału od nich przez pokolenie młodszych, aktywnych zawodowo podczas okresu $t + 1$. N_{Et+1} oznacza liczbę emerytów w okresie $t + 1$. Natomiast ogólny poziom cen P_{t+1} możemy potraktować jako wielkość stałą, charakterystyczną dla okresu $t + 1$.

Wyprowadzenie postulowanej zależności

Przyrównując do siebie formuły (14) i (15), otrzymujemy równanie różniczkowe:

[9] „Wysokość pojedynczego świadczenia będzie więc funkcją granicznej wielkości części produktu krajowego, która będzie mogła zostać przeznaczona na wypłatę emerytur, oraz liczby osób partycypujących w tym podziale." (cyt. [Dzierżawski, 2006, s. 167]).

$$\frac{dY_{Et+1}}{dN_{Et+1}} = \frac{Y_{Zt+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{r^*_{t+1}\left(1+r^*_{t+1}\right)^m}{\left(1+r^*_{t+1}\right)^m - 1} + \frac{\kappa K_{t+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{r_{t+1}\left(1+r_{t+1}\right)^m}{\left(1+r_{t+1}\right)^m - 1} \tag{16}$$

W odniesieniu do wyrażeń $(1 + r_{t+1})^m$ i $(1 + r^*_{t+1})^m$ możemy zastosować wzór uproszczony $(1 + r_{t+1})^m \approx 1 + mr_{t+1}$, stanowiący akceptowane w rozwiązaniach matematycznych przybliżone rozwinięcie formuły typu $(1 + x)^n$.

Przy zastosowaniu wskazanego wyżej przybliżenia do obliczeń, prowadzonych w dalszej części, istotną sprawą jest margines tolerowanego błędu. Zależy on od wielkości parametrów m oraz r_{t+1} (względnie r^*_{t+1}, gdy rozważamy waloryzację). Przyjmujemy, że r_{t+1} oraz r^*_{t+1} stanowią, odpowiednio, realną stopę procentowa oraz realną stopę waloryzacji w okresie $t + 1$, czyli $r_{t+1} = \check{r}_{t+1} - \pi$ i $r^*_{t+1} = \check{r}^*_{t+1} - \pi$, gdzie $\check{r}_{t+1}$ oraz $\check{r}^*_{t+1}$ to nominalne wartości stopy procentowej i stopy waloryzacji w okresie $t + 1$, zaś π oznacza występującą w tym okresie inflację. W przypadku parametru m, oznaczającego średnią liczbę lat życia człowieka na emeryturze, przyjmujemy 15. W towarzystwach ubezpieczeniowych, sprzedających programy emerytalne, tyle bowiem bierze się przeciętnie pod uwagę jako średni okres wypłat, w trakcie którego powinno dojść do zwrotu rentierowi wszystkich zgromadzonych przezeń w czasie aktywności zawodowej kapitałów. Okres ten ustalono statystycznie na podstawie wieloletnich obserwacji przeciętnej liczby lat życia ludzi na emeryturze. Zatem, przyjmując dla formuły $(1 + r_{t+1})^m \approx 1 + mr_{t+1}$ maksymalną wielkość dopuszczalnego błędu względnego na poziomie nie przekraczającym 10%, otrzymujemy przedział wartości realnych stóp procentowych i realnych stóp waloryzacji[10]: $0 < r_{t+1} < 0{,}035$.

Po uwzględnieniu omówionego przybliżenia, równanie różniczkowe (16) przyjmuje postać:

$$\frac{dY_{Et+1}}{dN_{Et+1}} = \frac{Y_{Zt+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{\left(1+mr^*_{t+1}\right)}{m} + \frac{\kappa K_{t+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{\left(1+mr_{t+1}\right)}{m} \tag{17}$$

Waloryzacja r^*_{t+1}, czy też stopa zwrotu z tej części, która wiąże się z wypłatami emerytur z I filaru, w warunkach długookresowej równowagi (por. [Góra, 2003a, s. 485]), dana jest za pomocą równania:

$$1 + r^*_{t+1} = \frac{1+\varepsilon}{1+n_E} \tag{18}$$

gdzie ε oznacza tempo wzrostu PKB, zaś n_E – to stopa przyrostu pokolenia emerytów, czyli $N_{Et+1} = (1 + n_E)N_{Et}$. Natomiast realna stopa procentowa w okre-

10 Można dyskutować, czy realna stopa procentowa (względnie stopa waloryzacji r^*_{t+1} w obszarze repartycyjnym systemu emerytalnego), wynosząca 2% lub 3%, jest wystarczająco duża. Biorąc jednak pod uwagę, że długookresowa stopa inflacji może przeciętnie wynosić 4% lub 5% – otrzymujemy nominalną stopę procentową poczynionych inwestycji na poziomie 7% lub 8%, co niejednokrotnie, przy sprzedaży programów emerytalnych, przedstawiane jest jako atrakcyjna i – ostrożnie szacując – możliwa do osiągnięcia roczna stopa zwrotu z inwestycji, dokonywanych przez fundusze emerytalne na rynkach finansowych.

sie $t+1$, czyli r_{t+1}, według modeli wzrostu, związana jest z produktywnością kapitału i wyraża się wzorem:

$$r_{t+1} = \frac{dY_{t+1}}{dK_{t+1}} - \delta \tag{19}$$

gdzie δ określa stopę zużycia (amortyzacji) kapitału. Funkcja produkcji $f\,(K, AL, \ldots)$ charakteryzuje się stałymi efektami skali, co – zgodnie z (1) – oznacza, że

$$\frac{dY_{t+1}}{dK_{t+1}} = \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \tag{20}$$

Z zależności (19) i (20) otrzymujemy wyrażenie na stopę procentową, a z (18) – na stopę waloryzacji:

$$r^*_{t+1} = \frac{\varepsilon - n_E}{1 + n_E},\ r_{t+1} = \frac{dY_{t+1}}{dK_{t+1}} - \delta \tag{21}$$

Zatem, równanie różniczkowe (17), przyjmuje postać:

$$\frac{dY_{Et+1}}{dN_{Et+1}} \approx \frac{Y_{Zt+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{1 + m\left(\frac{\varepsilon - n_E}{1 + n_E}\right)}{m} + \frac{\kappa K_{t+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{1 + m\left(\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta\right)}{m} \tag{22}$$

Uwzględniając natomiast (13), produkt Y_{t+1} i Y_{Zt+1} wyrażamy przez μ oraz Y_{Et+1}, czyli $Y_{Zt+1} = (\mu_1/\mu)Y_{Et+1}$ i $Y_{t+1} = Y_{Et+1}/\mu$; zatem

$$\frac{dY_{Et+1}}{dN_{Et+1}} \approx \frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{Y_{Et+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{1 + m\left(\frac{\varepsilon - n_E}{1 + n_E}\right)}{m} + \frac{\kappa K_{t+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{1 + m\left(\frac{Y_{Et+1}}{\mu K_{t+1}} - \delta\right)}{m} \tag{23}$$

Po odpowiednich przekształceniach, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{dY_{Et+1}}{dN_{Et+1}} \approx \frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{Y_{Et+1}}{N_{Et+1}} \cdot \frac{1 + n_E + m(\varepsilon - n_E)}{m(1 + n_E)} \cdot \frac{Y_{Et+1}}{N_{Et+1}} + \\ + \frac{\kappa}{\mu} \cdot \frac{Y_{Et+1}}{N_{Et+1}} + \left(\frac{\kappa}{m} - \kappa\delta\right) \cdot \frac{K_{t+1}}{N_{Et+1}} \end{aligned} \tag{24}$$

Przyjmując oznaczenie

$$\theta = \frac{1 + n_E + m(\varepsilon - n_E)}{1 + n_E} \tag{25}$$

równanie (24) możemy zapisać w postaci:

$$\frac{dY_{Et+1}}{dN_{Et+1}} \approx \left(\frac{\theta\mu_1}{\mu} + \frac{\kappa}{\mu}\right) \cdot \frac{Y_{Et+1}}{N_{Et+1}} + \left(\frac{\kappa}{m} - \kappa\delta\right) \cdot \frac{K_{t+1}}{N_{Et+1}}$$

czyli

$$\frac{dY_{Et+1}}{m(\theta\mu_1 + \kappa)Y_{Et+1} + \mu\kappa(1 - m\delta)K_{r+1}} \approx \frac{1}{m\mu} \cdot \frac{dN_{Et+1}}{N_{Et+1}}$$

W celu uproszczenia zapisu przy rozwiązywaniu powyższego równania różniczkowego, przyjmujemy podstawienia:

$$a = m(\theta\mu_1 + \kappa),\ b = \mu\kappa(1 - m\delta)K_{t+1},\ c = \frac{1}{m\mu}$$

które pozwalają przedstawić równanie w sposób:

$$\frac{dY_{Et+1}}{aY_{Et+1} + b} \approx c\frac{dN_{Et+1}}{N_{Et+1}} \tag{26}$$

Wtedy, po obustronnym scałkowaniu, otrzymujemy rozwiązanie:

$$\frac{1}{a}\ln\left| aY_{Et+1} + b \right| \approx c\ln\left| N_{Et+1} \right| + C \tag{27}$$

czyli

$$\ln\left| aY_{Et+1} + b \right| \approx ac\ln\left| N_{Et+1} \right| + B,\ \text{gdzie } B = aC$$

a więc

$$\ln\left| aY_{Et+1} + b \right| \approx \ln N_{Et+1}^{ac} + \ln a,\ \text{gdzie } \ln a = B$$

Zatem

$$\ln\left| aY_{Et+1} + b \right| \approx \ln aN_{Et+1}^{ac} \to aY_{Et+1} + b \approx aN_{Et+1}^{ac} \to Y_{Et+1} \approx \frac{a}{a}N_{Et+1}^{ac} - \frac{b}{a}$$

Wracając zaś do podstawień (z uwzględnieniem $\mu = \mu_1 + \mu_2$), otrzymujemy funkcję:

$$Y_{Et+1} \approx \frac{a}{m(\theta\mu_1 + \kappa)} \cdot N_{Et+1}^{\frac{\theta\mu_1 + \kappa}{\mu_1 + \mu_2}} - \frac{\kappa(\mu_1 + \mu_2)(1 - m\delta)}{m(\theta\mu_1 + \kappa)} \cdot K_{t+1} \tag{28}$$

W postaci intensywnej, czyli w przeliczeniu na jednego emeryta (rentiera), funkcja (28) może być zapisana:

$$y_{Et+1} \approx \frac{a}{m(\theta\mu_1 + \kappa)} \cdot N_{Et+1}^{\frac{\theta\mu_1 + \kappa}{\mu_1 + \mu_2} - 1} - \frac{\kappa(\mu_1 + \mu_2)(1 - m\delta)}{m(\theta\mu_1 + \kappa)} \cdot k_{t+1} \tag{29}$$

gdzie $y_{Et+1} = Y_{Et+1}/N_{Et+1}$, $k_{t+1} = K_{t+1}/N_{Et+1}$.

Niektóre właściwości wyznaczonej funkcji

Wnioskiem wypływającym z przyjmowanych założeń jest – analogicznie jak w przypadku funkcji produkcji względem kapitału – stały efekt skali dotyczący produktu przeznaczanego na zobowiązania emerytalne względem ilości emerytów. Wniosek taki wydaje się intuicyjnie oczywisty: jeśli społeczeństwo posiadające zinstytucjonalizowany system emerytalny nie chce drastycznego pogorszenia się poziomu życia osób w tzw. wieku poprodukcyjnym, to – przy wzrastającej liczbie emerytów – wzrastać powinien proporcjonalnie produkt przeznaczany na wypłatę świadczeń. Z tożsamości (5) oraz z zależności (15) wynika równość krańcowego i średniego świadczenia:

$$\frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} = \frac{dY_{Et+1}}{dN_{Et+1}} = \frac{Y_{Et+1}}{N_{Et+1}} = y_{Et+1} \tag{30}$$

W repartycyjnym systemie emerytalnym przyjmujemy, że $\mu_2 = 0$ i $\kappa = 0$, stąd równanie (28) redukuje się do tożsamości:

$$Y_{Et+1} \approx \frac{a}{m\theta\mu_1} \cdot N^{\theta}_{Et+1} \tag{31}$$

W przeliczeniu zaś na jednego emeryta do postaci:

$$y_{Et+1} \approx \frac{a}{m\theta\mu_1} \cdot N^{\theta-1}_{Et+1} \tag{32}$$

Stąd – przy uwzględnieniu zależności (30) – wartość przeciętnego, pojedynczego świadczenia r_{Et+1} (pojedynczej, średniej w skali roku, wypłaty emerytalnej) w systemie repartycyjnym, według omawianego modelu, wyniesie:

$$r_{Et+1} \approx \frac{aP_{t+1}}{m\theta\mu_1} \cdot N^{\theta-1}_{Et+1} \tag{33}$$

Zatem zależy ona od liczby emerytów oraz preferencji podziału μ_1, jak też od lat m trwania okresu emerytalnego, a także od stopy wzrostu gospodarczego ε i przyrostu liczebności pokolenia emerytów n_E, które to wskaźniki – zgodnie z zapisem (25) – zawarte są we współczynniku θ. Natomiast zmienność parametru θ uzależniona od przyrostu liczebności pokolenia emerytów n_E, według równania (25), odpowiada np. zmienności funkcji typu:

$$y = \frac{-14x + 1,45}{15x + 15} \tag{34}$$

utworzonej przy założeniach liczbowych: $m = 15$, $\varepsilon = 0,03$ zaś $n_E = x$. Funkcja (34) jest malejąca w całej swej dziedzinie, natomiast w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych xOy przyjmuje wartości z przedziału (0,967; 0), gdy $0 < x < 0,103$.

W systemie kapitałowym natomiast przyjmujemy $\mu_1 = 0$, stąd równanie (28) redukuje się do postaci:

$$Y_{Et+1} \approx \frac{a}{m\kappa} \cdot N_{Et+1}^{\frac{\kappa}{\mu_2}} - \frac{\mu_2}{m}(1 - m\delta)K_{t+1} \tag{35}$$

Wskaźniki dopasowania kapitałowego (κ) i podziału produktu (μ_2) są ze sobą ściśle powiązane. Produkt Y_{Kt+1}, przeznaczany przez pokolenie młodych na zakup pożądanego kapitału K^*_{t+1} oraz kapitał posiadany przez pokolenie rentierów, zdyskontowany do kapitału pożądanego, powinny się ze sobą zrównywać: $Y_{Kt+1} = K^*_{t+1}$. Zatem, uwzględniając po odpowiednim przekształceniu zależności (7) i (13), wskazaną równość produktu i kapitału pożądanego możemy zapisać jako:

$$\mu_2 Y_{t+1} = \kappa K_{t+1} \tag{35a}$$

czyli

$$\frac{\kappa}{\mu_2} = \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \tag{35b}$$

Co – z uwagi na zależność (21) – oznacza, że

$$\frac{\kappa}{\mu_2} = r_{t+1} + \delta \tag{35c}$$

Zatem, stosunek wskaźnika dopasowania kapitału do wskaźnika podziału produktu równa się przeciętnej produktywności kapitału (35b), a zatem – sumie stóp r_{t+1} (procentowej) i δ (amortyzacji) – zależność (35c).

Średnia wartość pojedynczej, rocznej wypłaty (annuitetu) r_{Et+1} w systemie kapitałowym, według prezentowanego modelu, wyniesie:

$$r_{Et+1} \approx \frac{aP_{t+1}}{m\kappa} \cdot N_{Et+1}^{\frac{\kappa}{\mu_2 - 1}} = P_{t+1}\frac{\mu_2}{m}(1 - m\delta) \cdot k_{t+1} \tag{36}$$

Niekorzystne dopasowanie kapitału zgromadzonego w stosunku do kapitału pożądanego (przypadek, gdy $\kappa < 1$), przesuwa omawianą krzywą w dół. Dopasowywanie się wartości kapitałów do cen rynkowych, jak wiadomo, posiada cechy samoregulacji, automatycznie obniżające lub podwyższające wartość kapitałowych składników majątku, a tym samym – co jest sprawą oczywistą – obniżające lub podwyższające status materialny rentierów, żyjących z udostępniania i sprzedaży kapitału w postaci aktywów finansowych, ale także nieruchomości czy innych składników majątkowych.

Kapitałowy system emerytalny ma cechy samoregulacji w odniesieniu do wartości otrzymywanych emerytur. Wypłacana w nim będzie zawsze aktualna wartość zgromadzonych aktywów, niezależnie od tego, czy poszczególni przedstawiciele pokolenia rentierów dokonywali inwestycji za pośrednictwem rynków finansowych, czy gromadzili majątek inwestując np. w nieruchomości, złoto czy inne aktywa. W systemie repartycyjnym, gdzie obowiązkowe składki ubezpieczeń społecznych są postrzegane jako forma celowych podatków socjalnych (por. [Góra, 2003a, s. 487]), zawsze mogą być prowadzone działania organów państwa zmierzające do kształtowania współczynnika μ_1 – jak możemy to ująć na gruncie omawianego modelu. W praktyce wiąże się to z decyzją o wysokości obowiązkowych składek emerytalnych obciążających wynagrodzenia pracujących (por. [Góra, 2003a, s. 486]).

Kształtowanie współczynnika μ, jako zmiennej egzogenicznej modelu o charakterze politycznym, jest jednak możliwe również w przypadku systemu czysto kapitałowego. Nietrudno bowiem wyobrazić sobie sytuację, kiedy wskaźnik κ będzie drastycznie niski (np. $\kappa = 0{,}5$). Wówczas to – przy demokratycznym systemie sprawowania władzy – mogą powstać żądania, domagające się interwencji państwa. Interwencja zaś może przyjąć formy odejścia od systemu kapitałowego na rzecz systemu mieszanego (powrót do formuły (29)). Wówczas to – trzymając się omawianego tu modelu – zacznie się ponownie oddziaływanie organów państwowych na wskaźnik μ, poprzez jego składową μ_1, która może zostać dołożona (w modelu czysto kapitałowym $\mu_1 = 0$) i społecznie może być postrzegana jak wzrost podatków ogólnych lub wzrost obciążeń związanych z opodatkowaniem celowym (typu socjalnego), nazywanym „składki ubezpieczenia społecznego", mającym jednak charakter typowo fiskalny.

Modelowanie efektu Laffera[11]

W prezentowanym modelu udział produktu społecznego przeznaczanego na konsumpcję pokolenia emerytów w komponencie repartycyjnym systemu reprezentowany jest przez parametr μ_1. Systematyczne więc zwiększanie udziału PKB dotyczącego konsumpcji emerytów w obszarze komponentu repartycyjnego oznacza stały wzrost parametru μ_1 (parametr μ_2 regulowany jest rynkowo zgodnie z zależnością (35c)). W ekonomii najogólniejsze sposoby ilościowego szacowania efektywności polegają na ocenie różnicy istotnych wielkości o znaczeniu gospodarczym lub na ocenie ich ilorazu (por. [Kłosiński, 1995, s. 107-110]). Zatem siła sugerowanego przez Górę efektu Laffera [Góra, 2003a, s. 484-485], w powiązaniu z ekonomią emerytalną powinna być skorelowana z proporcją PKB przeznaczanego na wynagrodzenie czynników produkcji i PKB związanego z konsumpcją pokolenia emerytów, czyli z relacją polegającą na uchwyceniu różnicy: $Y_{Lt+1} = Y_{t+1} - Y_{Et+1}$, gdzie Y_{Lt+1} reprezentuje tę część produktu, która służy opłaceniu pracy efektywnej pokolenia ludzi młodych, czynnych zawodowo, zaś Y_{Et+1} oznacza część produktu, która przeznaczana jest na konsumpcję pokolenia emerytów, zaś Y_{t+1} to produkt (PKB) wytwarzany w całej gospodarce w okresie $t + 1$.

[11] Wskazany efekt, który w latach 80. XX w. zaczęto określać od nazwiska amerykańskiego ekonomisty Arthura Laffera, był znany dużo wcześniej i przewidywany przez innych twórców w dziedzinie ekonomii, np. przez Josepha A. Schumpetera (zob. [Glapiński, 2003]).

W celu wyeksponowanie komponentu repartycyjnego w systemie z myślą o uchwyceniu efektu Laffera, przyjmiemy jeszcze jedno upraszczające założenie: otóż cały kapitał, zgromadzony przez rentierów w okresie ich wcześniejszej aktywności zawodowej, równy $K_{t+1} = k_{t+1} \cdot N_{Et+1}$ – zgodnie z przekształconą zależnością znajdującą się w opisie do wzoru (29) – zostaje przez pokolenie młodych odkupiony od pokolenia starszych jednorazowo na samym początku okresu $t + 1$ i w całości użyty do produkcji w tym okresie. Parametr k_{t+1} oznacza przeciętną ilość kapitału zgromadzoną przez jednego rentiera (emeryta). W całym okresie $t + 1$ pozostaną już tylko, jako obciążenie dla pracujących, świadczenia z komponentu repartycyjnego, stanowiące podział aktualnie wytwarzanego produktu. Zatem parametry κ i μ_2 zawarte w równaniach (28) i (29), przyjmują wtedy przez cały okres $t + 1$ wartości zerowe ($\kappa = 0$ i $\mu_2 = 0$).

W oparciu o zależności omawianego modelu, równanie (10) w powiązaniu z równaniem (11), możemy przedstawić w postaci:

$$Y_{t+1} = Y_{Lt+1} + Y_{Et+1} \rightarrow Y_{t+1} = Y_{Lt+1} + Y_{Zt+1} + Y_{Kt+1} \rightarrow Y_{Lt+1} + Y_{Kt+1} = \\ = Y_{t+1} - Y_{Zt+1}$$

Oznaczając przez Y_{cw} sumę produktów Y_{Lt+1} i Y_{Kt+1}, czyli łączny produkt przeznaczany na wynagrodzenie czynników wytwórczych, otrzymamy relację efektywnościową repartycyjno-kapitałowego systemu emerytalnego w postaci różnicy:

$$Y_{cw} = Y_{t+1} - Y_{Zt+1} \tag{37}$$

Przy analizowaniu efektu Laffera w oparciu o zależność (37) na gruncie omawianego modelu wykorzystamy funkcję produkcji Cobba-Douglasa:

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

gdzie K oznacza kapitał, który – zgodnie z przyjętym założeniem – na początku okresu $t + 1$ został w całości odkupiony od rentierów i zaangażowany w proces produkcyjny, czyli $K_{t+1} = k_{t+1} \cdot N_{Et+1}$. Parametr α reprezentuje elastyczność wytwarzanego produktu względem nakładów kapitału, zaś $(AL)_{t+1}$ i N_{Et+1} – odpowiednio – pracę efektywną i liczbę rentierów (emerytów) w okresie $t + 1$. Zatem funkcja produkcji przyjmuje tutaj postać:

$$Y_{t+1} = (k_{t+1} N_{Et+1})^{\alpha} \cdot (AL)_{t+1}^{1-\alpha} = k_{t+1}^{\alpha} N_{Et+1}^{\alpha} (AL)_{t+1}^{1-\alpha} \tag{38}$$

Wracając do zależności (37) z uwzględnieniem funkcji produkcji (38) oraz komponentu repartycyjnego (31) w systemie emerytalnym, mamy zależność:

$$Y_{cw} = k_{t+1}^{\alpha} (AL)_{t+1}^{1-\alpha} N_{Et+1}^{\alpha} - \frac{a}{m\theta\mu_1} \cdot N_{Et+1}^{\theta} \tag{39}$$

W neoklasycznych modelach wzrostu podstawowe wielkości ekonomiczne przyjmuje się w przeliczeniu na jednostkę pracy efektywnej, czyli podzielone przez wielkość AL, symbolizującą pracę efektywną w danej gospodarce. Zatem zależność (39), gdzie dla uproszczenia zapisu rezygnujemy z indeksu sygnalizującego okres, tj. z indeksu $t + 1$, możemy przedstawić w postaci:

$$Y_{cw} = k^{\alpha} \cdot \left(\frac{N_E}{AL}\right) AL - \frac{a}{m\theta\mu_1} \cdot N_E^{\theta - 1} \cdot N_E \tag{40}$$

Dzieląc obustronnie równanie (40) przez czynnik AL, otrzymujemy:

$$\frac{Y_{cw}}{AL} = k^{\alpha} \cdot \left(\frac{N_E}{AL}\right)^{\alpha} - \frac{a}{m\theta\mu_1} \cdot N_E^{\theta - 1} \cdot \frac{N_E}{AL} \tag{41}$$

Przyjmując natomiast oznaczenia $y_{cw} = Y_{cw}/AL$, $x = N_E/AL$ oraz uwzględniając zależność (33), równanie (41) możemy zapisać w postaci:

$$y_{cw} = k_{t+1}^{\alpha} \cdot x^{\alpha} - \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \tag{42}$$

gdzie r_{Et+1} oznacza przeciętne świadczenie emerytalne pochodzące z komponentu repartycyjnego. Wielkość oznaczona przez x w równaniu (42) określa proporcje emerytów (rentierów) w stosunku do ilości osób pracujących w gospodarce w okresie $t + 1$ (odwrotność x przedstawia liczbę osób zatrudnionych w gospodarce przypadających na jednego emeryta). Formuła (42) jest więc funkcją zmiennej x i przedstawia wynagrodzenie czynników wytwórczych w przeliczeniu na jednostkę efektywnej pracy w zależności od proporcji emerytów (rentierów) do pracujących (zmienna x) oraz przy nagromadzonym przez jednego rentiera przeciętnym kapitale k_{t+1}, elastyczności produktu względem kapitały α oraz przy przeciętnej, realnej wypłacie emerytury z komponentu repartycyjnego r_{Et+1}/P_{t+1}. Zmienna x przyjmuje wartości równe bądź większe od zera ($x \geq 0$).

W funkcji (42) k_{t+1} – przeciętny kapitał przypadający na jednego rentiera (zgromadzony przez jednego emeryta) – możemy przyjąć za wielkość względnie stałą, będącą odzwierciedleniem preferencji czasowych odraczania konsumpcji w warunkach danej gospodarki (czyli z uwzględnieniem wszystkich obowiązkowych składek emerytalnych i przy przeciętnym w danej gospodarce poziomie otrzymywanych dochodów netto) oraz przy kulturowo ukształtowanych nawykach zapobiegliwości i oszczędzania. Stałość tego parametru dodatkowo wzmocniona jest przez założenie, że cały kapitał, zgromadzony przez rentierów w okresie ich wcześniejszej aktywności zawodowej został przez pokolenie młodych odkupiony na samym początku okresu $t + 1$ i w całości zużyty do produkcji w tym okresie. Podobnie r_{Et+1} (przeciętne świadczenie emerytalne z komponentu repartycyjnego w okresie $t + 1$) i P_{t+1} (ogólny poziom cen w okresie $t + 1$) przyjmujemy jako wielkości (parametry) stałe, którym jednak, w trakcie analiz teoretycznych, możemy wybierać różne kombinacje dodatnich wartości.

Funkcję (42) można rozpatrywać jako sumę dwóch różnych funkcji: stale rosnącej funkcji potęgowej o ułamkowym wykładniku potęgi α (komponent $k^\alpha x^\alpha$) oraz funkcji liniowej (komponent $(r_E/P)x$), odejmowanej od części potęgowej. Z właściwości obydwu funkcji wiadomo, że potęgowa o wykładniku ułamkowym jest rosnąca, lecz przyrosty jej wartości stale maleją, dając wykresy krzywej wklęsłej, rosnącej w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych kartezjańskich. Funkcja liniowa zaś, ze względu na minus stojący przed jej wskaźnikiem kierunkowym (r_E/P), jest funkcją liniową malejącą, pomniejszającą wartości komponentu potęgowego.

Ze względu na możliwość ustalania (wybierania) parametrom α, k_{t+1}, r_{Et+1} i P_{t+1} różnych kombinacji dodatnich wartości, mamy do czynienia z całą grupą (rodziną) krzywych opisywanych równaniem (42). Ograniczenie dotyczy jedynie parametru α, gdyż – zgodnie z jego interpretacją ekonomiczną – może on przyjmować wielkości ułamkowe ($0 < \alpha < 1$). Charakterystyczną cechą wskazanej rodziny funkcji jest posiadanie lokalnego ekstremum przez niektóre krzywe należące do całej grupy opisywanej równaniem (42).

Pierwszą pochodną względem x zależności funkcyjnej (42) przedstawia równanie:

$$\frac{dy_{ce}}{dx} = \alpha \cdot k_{t+1}^{\alpha} \cdot x^{\alpha-1} - \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \tag{43}$$

Warunek konieczny istnienia lokalnego ekstremum funkcji, kiedy to $dy_{cw}/dx = 0$, wskazuje na wartość x_0 równą:

$$x_0 = \left(\frac{r_{Et+1}}{\alpha \cdot k_{t+1}^{\alpha} \cdot P_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{\alpha \cdot k_{t+1}^{\alpha} \cdot P_{t+1}}{r_{Et+1}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{44}$$

Drugą pochodną funkcji (42) względem x przedstawia równanie:

$$\frac{d^2 y_{cw}}{dx^2} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot k_{t+1}^{\alpha} \cdot x^{\alpha-2} \tag{45}$$

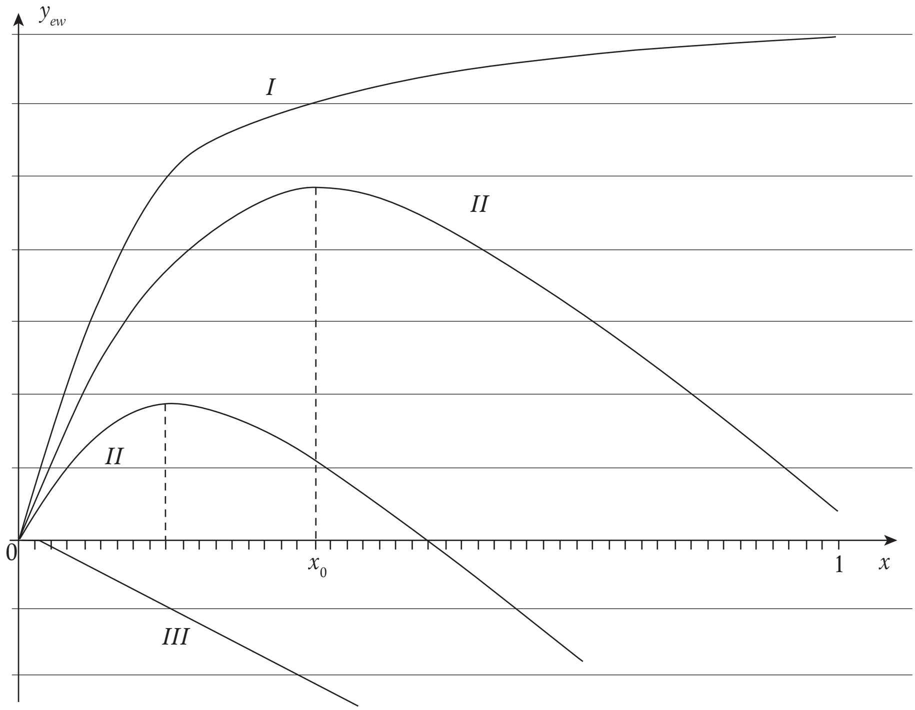
Z uwagi na to, że $x_0 > 0$, $k_{t+1} > 0$, $\alpha > 0$ i $0 < \alpha < 1$, druga pochodna funkcji y_{cw} opisana równaniem (45) jest w punkcie x_0 ujemna ze względu na czynnik $(\alpha - 1) < 0$. Zatem, w x_0 pewna podgrupa krzywych opisanych wzorem (42) posiada lokalne maksimum. W zależności jednak od kombinacji parametrów α, k_{t+1}, r_{Et+1} i P_{t+1} kształty krzywych opisywanych zależnością funkcyjną (42) mogą przybierać wykresy, które ilustruje rys. 1.

Podgrupa krzywych, których reprezentantem jest wykres *I* wystąpi w przypadku, gdy pierwsza pochodna funkcji (42) przyjmuje wartość dodatnią dla wszystkich $x > 0$, czyli dla wszystkich możliwych przypadków proporcji N_E/AL zachodzi:

$$\alpha k_{t+1}^{\alpha} x^{\alpha-1} - \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} > 0 \to \alpha k_{t+1}^{\alpha} x^{\alpha-1} > \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \to \alpha k_{t+1}^{\alpha} \frac{x^{\alpha}}{x} > \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \tag{46}$$

Rysunek 1

Wykresy funkcji efektywności gospodarki z mieszanym systemem emerytalnym



Źródło: opracowanie własne

Odwołując się do podanej wcześniej uwagi, że formułę (42) można potraktować jako sumę dwóch różnych funkcji: potęgowej, stale rosnącej, o wykładniku ułamkowym, i liniowej, stale malejącej, to wykres typu *I* oznacza, że dominuje w nim funkcja potęgowa, tzn. komponent potęgowy we wzorze (42), dla wszystkich $x > 0$, stale przewyższa jej komponent liniowy.

Uwzględniając zaś, że $x = N_E/AL$, gdzie dla uproszczenia zapisu pominięty został indeks okresu, nierówność (46) możemy zapisać:

$$\alpha \cdot \frac{AL}{N_E}\left(\frac{k_{t+1}N_E}{AL}\right)^{\alpha} > \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \rightarrow \alpha \cdot \frac{AL}{N_E}\left(\frac{K_{t+1}}{AL}\right)^{\alpha} > \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \tag{47}$$

Wielkość K_{t+1}/AL opisuje kapitał przypadający na jednostkę efektywnej pracy. Oznaczając ją symbolem $\hat{k}_{t+1}$, nierówność (47) możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{\alpha \cdot \hat{k}^{\alpha}_{t+1}}{x} > \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \rightarrow \alpha \cdot \frac{AL}{N_E} \cdot \hat{k}^{\alpha}_{t+1} > \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \tag{48}$$

która wskazuje, że jeśli – przy pewnej, liczbowej kombinacji parametrów α, $\hat{k}_{t+1}$, r_{Et+1} i P_{t+1} – iloczyn elastyczności (α) produktu względem kapitału oraz liczby pracujących na jednego emeryta (AL/N_E) oraz potęgi (w rzeczywistości pierwiastka o wykładniku α) z kapitału na jednostkę efektywnej pracy, stale przekracza realną wartość przeciętnego, rocznego świadczenia emerytalnego (r_{Et+1}/P_{t+1}) z repartycyjnego obszaru systemu, to funkcja (42) jest rosnąca dla wszystkich x, czyli dla wszystkich proporcji N_E/AL. Produkt, który pozostaje czynnikom wytwórczym jako ich wynagrodzenie nie powinien stanowić (przynajmniej w teorii na gruncie niniejszego modelu) negatywnego bodźca, zniechęcającego czynniki wytwórcze do angażowania się w procesy tworzenia PKB.

Istnieją jednakże takie kombinacje parametrów α, $\hat{k}_{t+1}$, r_{Et+1} i P_{t+1}, dla których reprezentantami krzywych opisywanych funkcją (42) są wykresy typu *II* na rys. 1. Wówczas to zachodzą relacje:

$$\bigwedge_{0<x<x_0} \frac{\alpha \cdot \hat{k}^{\alpha}_{t+1}}{x} > \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \wedge \bigwedge_{x_0<x<+\infty} \frac{\alpha \cdot \hat{k}^{\alpha}_{t+1}}{x} < \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \tag{49}$$

Krzywe typu *II* na rys. 1 wskazują na występowanie efektu Laffera łączonego z bodźcem, którym jest wynagrodzenie czynników wytwórczych w przeliczeniu na efektywną pracę y_{cw}. Funkcja (42) osiąga wówczas swoje maksimum w punkcie o odciętej x_0 opisanej równaniem (44).

Natomiast przypadek krzywej *III* na rys. 1 ilustruje sytuację takich kombinacji liczbowych parametrów α, $\hat{k}_{t+1}$, r_{Et+1} i P_{t+1}, przy których dla każdego $x > 0$ zachodzi stale nierówność:

$$\frac{\alpha \cdot \hat{k}^{\alpha}_{t+1}}{x} < \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}}, \text{ czyli } \alpha \cdot \frac{AL}{N_E} \cdot \hat{k}^{\alpha}_{t+1} < \frac{r_{Et+1}}{P_{t+1}} \tag{50}$$

Oznacza ona, że w przypadku wysokiego poziomu przeciętnych, realnych wypłat świadczeń w skali roku z komponentu repartycyjnego (r_{Et+1}/P_{t+1}), utrzymywanych niezależnie od poziomu proporcji AL/N_E, mamy do czynienia z permanentnie negatywnym bodźcem, łączonym z produktem y_{cw}, stanowiącym wynagrodzenie czynników wytwórczych.

Wnioski

Zależność związana z wynagrodzeniem czynników wytwórczych, w której – z jednej strony występuje czynnik AL/N_E, nierozerwalnie związany z demografią, z drugiej zaś – świadczenie emerytalne z komponentu repartycyjnego (r_{Et+1}/P_{t+1}) w ujęciu realnym, wskazuje na nieusuwalne znaczenie procesów demograficznych w powiązaniu z postulatem godziwych emerytur w systemie repartycyjno-kapitałowym o zdefiniowanym świadczeniu[12]. Świadczenie

[12] Myśl przewodnia eseju K. Dzierżawskiego, omawiającego problematykę emerytalną językiem opisowym, dotyczy właśnie procesów demograficznych niemożliwych do wyeliminowania, niezależnie od rodzaju przyjmowanego systemu emerytalnego [Dzierżawski, 2006].

w polskim systemie po reformie z 1999 r. zdefiniowane jest ogólnie w sposób: $E = K/m$, gdzie K oznacza środki wykazywane na rachunkach osoby przechodzącej na emeryturę (w ZUS i funduszach emerytalnych), zaś m to średnie, dalsze trwanie życia w momencie przejścia na emeryturę (por. [Świerczyńska, 2007, s. 243]). Czynnik kapitałowy odgrywa w prezentowanych rozważaniach pewną rolę, lecz jest ograniczany w omawianych relacjach przez ułamkowy parametru α, przedstawiający elastyczność wytwarzanego produktu względem nakładów kapitałowych, którymi dysponuje pokolenie rentierów (emerytów).

W gospodarce zawierającej instytucjonalny, repartycyjno-kapitałowy system ekonomii emerytalnej, możliwość uniknięcie efektu Laffera, wskazującego na występowanie swoistego optimum bodźców (wynagrodzenie czynników wytwórczych), mających wpływ na angażowanie się tych czynników w procesy tworzenia PKB, występuje jedynie w przypadku, gdy poziom przeciętnych, realnych wypłat emerytur w skali roku w obszarze repartycyjnym (r_{Et+1}/P_{t+1}), jest stosunkowo niski (krzywe typy I na rys. 1), tzn. mniejszy od iloczynu elastyczności α, proporcji pracujących do liczby emerytów (AL/N_E) i nagromadzonych kapitałów w przeliczeniu na jednostkę efektywnej pracy podniesionych do ułamkowej potęgi α.

Utrzymywanie natomiast na bardzo niskim poziomie rocznych, przeciętnych wypłat emerytur z komponentu repartycyjnego, rozpatrywanych w kategoriach realnych, wiąże się z problematyką o charakterze wartościującym, dotyczącą zagadnień ubóstwa pokolenia ludzi starszych w społeczeństwie. Przeciętnie niskie dochody uzyskiwane przez ludzi w wieku produkcyjnym, pracujących w gospodarkach krajów biednych (biedniejszych w sensie poziomu PKB *per capita* w stosunku do gospodarek rozwiniętych), nie pozwalają na wystarczające nagromadzenie kapitałów na okres emerytalny. Stąd też rola komponentu repartycyjnego w biedniejszych gospodarkach wydaje się wciąż wiodąca, jako sposób na zaradzenie problemom ubóstwa ludzi starszych, pobierających świadczenia emerytalne. Z drugiej strony, nadmierne obciążanie pokolenia pracujących składkami emerytalnymi, przy niskim wskaźniku AL/N_E, czyli obciążanie ich swoistym, dodatkowym podatkiem socjalnym, przekazywanym dalej w formie świadczeń aktualnemu pokoleniu emerytów, posiada negatywne oddziaływanie na pracujących, samozatrudnionych i płatników składek. Obciążenie takie – po pierwsze – przyczynia się do poszukiwania różnych oszczędności w zatrudnieniu, co ma wpływ na utrzymywanie się wysokiego bezrobocia, oraz wywołuje ucieczkę w szarą strefę gospodarki (por. Rogalska, 2007, s. 166-167]), po drugie – wpływa na utrzymywanie się niskiego poziomu dochodów netto, który wtórnie nie pozwala na dokonywanie oszczędności celem inwestowania ich w aktywa kapitałowe mogące posłużyć jako zabezpieczenie konsumpcji w okresie emerytalnym (rentierskim). Otrzymujemy w ten sposób trudną do przerwania pętlę niemożności i chronicznego ubóstwa dużej rzeszy biednych pracujących i biednych emerytów. Zatem, w celu utrzymania gospodarki krajowej na właściwej ścieżce zrównoważonego wzrostu, poszukiwanie optimum występującego na krzywej typu Laffera, pojawiającej się w powiązaniu z ekonomią emerytalną również w systemie repartycyjno-kapitałowym – co pokazują niniejsze rozważania – posiada istotne znaczenie makroekonomiczne.

Niemniej jednak weryfikacja empirycznej i teoretycznej przydatności rozwiązań wynikających z zaprezentowanego modelu będzie wymagała dalszych, pogłębionych badań przedmiotu, którym są występujące w praktyce rozwiązania emerytalne, możliwe do oceny w kategoriach ilościowych przy założeniu dostępności odpowiednich danych statystycznych różnych gospodarek państwowych. Jednakże matematyczne modelowanie rzeczywistości gospodarczej – jak pokazuje to historia rozwoju teorii wzrostu gospodarczego i tworzone na jej gruncie modelowanie ekonometryczne – zawiera w sobie autonomiczną doniosłość poznawczą, która pozwala głębiej rozumieć i bardziej normatywnie odnosić się do skomplikowanej rzeczywistości gospodarczej.

Bibliografia

Balicki W., [2006], *Makroekonomia*, Poznań.

Dzierżawski K., [2006], *Reforma emerytalna: fakty, mity, sofizmaty*, [w:] „Krótki kurs ekonomii praktycznej", Warszawa, s. 151-168.

Glapiński A., [2003], *Teoria kryzysu państwa podatków Josepha A. Schumpetera*, „Ekonomista" nr 1, s. 21-41.

Góra M., [2003a], *Inne spojrzenie na podstawowe zagadnienia ekonomii emerytalnej*, „Ekonomista" nr 4, s. 479-499.

Góra M., [2003b], *System emerytalny*, Warszawa.

Góra M., Palmer E., [2002], *Shifting Perspectives in Pensions*, CASE (www.case.com.pl).

Kłosiński K.A., [1995], *Racjonalność decyzji, z myślą o nowych paradygmatach w ekonomii*, Warszawa.

Lewandowski P., [2005], *Efektywność systemu emerytalnego w zależności od uczestnictwa w nim kobiet i mężczyzn*, „Ekonomista" nr 4, s. 528-545.

Rogalska E., [2007], *Instytucjonalne determinanty poziomu szarej strefy. „Ukryta" gospodarka jako rezultat jakości polityki gospodarczej*, [w:] „Uwarunkowania rozwoju społeczno-gospodarczego Polski" pod red. Balcerzak A.P., D. Górecka, Toruń.

Romer D., [2000], *Makroekonomia dla zaawansowanych*, tłum. A. Szeworski, Warszawa.

Świerczyńska A., [2007], *Perspektywy integracji systemów emerytalnych w Unii Europejskiej*, „Ekonomista" nr 2, s. 235-250.

THE LAFFER EFFECT IN THE PENSION SYSTEM

Summary

The paper aims to create a mathematical model of a social security program taking into account the mixed pension system introduced in Poland in 1999. The author subsequently uses this model to show how pension systems may be affected by the so-called Laffer effect – an effect intuitively predicted by various authors and involving the relationship between possible rates of taxation and the resulting levels of government revenue as a possibility in the economy. The econometric modeling carried out in the article is based on neoclassical growth models, especially one based on research by American economist Peter Diamond, who suggested that people's lives should be divided into two main periods: professional career and retirement. The analysis conducted by Chrzonstowski combines basic economic values that influence the functioning of the pension system. The study aims to demonstrate the possibility of the occurrence of the Laffer effect in relation to a basic driver of economic growth – "a product constituting remuneration for production factors: capital and human labor", the author says.

The article confirms that the Laffer effect, indicating a specific optimum, can occur in any economy with an institutional pension system, according to Chrzonstowski. The occurrence of such a point of maximum efficiency of the economic system should encourage politicians to search for a permanent path of sustainable growth taking into account this optimum, the author concludes.

Keywords: pension system, pay-as-you-go (PAYG) system, funded pension system, Laffer effect/curve

JEL classification codes: C29, E61, H55, J19, O17