



*The World's Largest Open Access Agricultural & Applied Economics Digital Library*

**This document is discoverable and free to researchers across the globe due to the work of AgEcon Search.**

**Help ensure our sustainability.**

Give to AgEcon Search

AgEcon Search

<http://ageconsearch.umn.edu>

[aesearch@umn.edu](mailto:aesearch@umn.edu)

*Papers downloaded from **AgEcon Search** may be used for non-commercial purposes and personal study only. No other use, including posting to another Internet site, is permitted without permission from the copyright owner (not AgEcon Search), or as allowed under the provisions of Fair Use, U.S. Copyright Act, Title 17 U.S.C.*

*No endorsement of AgEcon Search or its fundraising activities by the author(s) of the following work or their employer(s) is intended or implied.*

## Previsão de preços futuros de *Commodities* Agrícolas com diferenciações inteira e fracionária, e erros heteroscedásticos

Ricardo Chaves Lima\*  
Marcos Roberto Góis\*\*  
Charles Ulises\*\*\*

**Resumo:** O presente trabalho tem como objetivo modelar séries temporais para efeito de previsão com diferenciações inteira e fracionária, utilizando dados de preços futuros de *commodities* agrícolas. Modelos de séries temporais do tipo *ARMA/ARIMA* (diferenciação inteira) serão estimados como termo de comparação com os modelos do tipo *ARFIMA* (diferenciação fracionária). Em ambos os casos, os erros dos modelos serão estimados assumindo-se a possibilidade de estimação da volatilidade. O poder de previsão de cada modelo será comparado pelo critério do erro quadrado médio da previsão (EQM). A estimação do termo de diferenciação fracionário ( $d$ ) também será utilizada para examinar as características de longa dependência das séries. Os resultados indicaram que todas as séries de retornos de preços futuros utilizados são estacionárias. O valor do  $d$  fracionário da série de açúcar indicou um comportamento de antipersistência a choques, enquanto que esses valores para as demais *commodities* apresentaram comportamento persistente. Na maioria dos casos os modelos *ARFIMA* mostraram um melhor poder de previsão.

---

\* Professor do Dep<sup>to</sup> de Economia / PIMES da Universidade Federal de Pernambuco. rlima@ufpe.br

\*\* Professor do Núcleo de Administração e Economia / CAA da Universidade Federal de Pernambuco. mrgois@hotmail.com

\*\*\* Professor do Dep<sup>to</sup> de Ciências Administrativas da Universidade Federal de Pernambuco. nefi@dca.ufpe.br

**Palavras-chave:** modelos ARMA, diferenciação fracionária, modelos ARFIMA.

**Classificação JEL:** C22, G13

**Abstract:** *this paper intends to model time series with the aim of perform forecast using integer and fractional differencing for agricultural commodities future's price. Time series models of the ARMA/ARIMA type (integer differencing) will be estimated and compared to ARFIMA type models (fractional differencing). In both cases errors are modeled assuming the occurrence of volatility. The forecast power of each model will be compared using the criterion of the mean squared error (MSE). The estimation of fractional term ( $d$ ) will be also used to examine the long run dependency properties of the series. The results showed that, for all series, returns are stationary. The sugar series, however, showed anti-persistence, while all other series showed to be long memory. The ARFIMA models showed, in general, a better forecasting performance.*

**Key words:** ARIMA models, fractional differencing, ARFIMA models.

**JEL Classification:** C22, G13

## 1. Introdução

Muitas séries temporais econômicas mudam suas características estocásticas ao longo do tempo de observação. São as chamadas séries não-estacionárias. Estas séries podem, no entanto, exibir algum tipo de homogeneidade. Ou seja, podem se comportar de forma homogênea aparte de níveis locais e/ou tendência. Assim, é possível obter séries estacionárias a partir de séries não-estacionárias homogêneas se os níveis locais e a tendência forem retirados pelo processo de *diferenciação* (Box, Jenkins e Reinsel, 1994). O processo padrão de diferenciação de uma série temporal não-estacionária homogênea consiste em transformar a série original usando-se o operador de diferença  $(1 - L)^d$ , onde  $L$  é o operador de defasagem e  $d$  é o grau de diferenciação que será imposto à série. A previsão com modelos de séries temporais assume que o grau

de diferenciação das séries homogêneas é um número inteiro. A suposição de um grau de diferenciação inteiro, no entanto, é restritiva. Ou seja, considerando-se que o grau de diferenciação de uma série temporal pode assumir valores fracionários, um conjunto de análises com relação à dinâmica de dependência de longo prazo da série pode ser realizada (Barkoulas e Baum, 1997). Da mesma forma, pode-se supor que a diferenciação fracionária, sendo o caso geral do processo de diferenciação, é capaz de produzir previsões com menor erro quadrado médio.

O presente trabalho tem como objetivo modelar séries temporais para efeito de previsão com diferenciações inteira e fracionária. Ou seja, modelos de diferenciação inteira do tipo  $ARIMA(p,d,q)$  e modelos de diferenciação fracionária do tipo  $ARFIMA(p,d,q)$  serão estimados com o objetivo de comparar o poder de previsão de cada um através do cálculo do erro quadrado médio de previsão *ex-post*. Os modelos de diferenciação fracionária também serão utilizados para avaliar as propriedades de memória longa das séries. As séries utilizadas correspondem a retornos de preços futuros de *commodities* agrícolas. Alguns autores, como Taylor (1986) sugere a possibilidade de ocorrência de autocorrelação da volatilidade e heteroscedasticidade da maioria das séries financeiras. Assim, é necessário realizar testes estatísticos para examinar a ocorrência de heteroscedasticidade condicional e modelar os termos aleatórios com estrutura *ARCH/GARCH* no caso da volatilidade. Além dessa introdução, a seção 2 discute os modelos *ARIMA*, *ARFIMA* e a modelagem de erros, a seção 3 apresenta a estratégia empírica da pesquisa, a seção 4 apresenta os resultados obtidos. As considerações finais são apresentadas na seção 5.

## 2. Modelos de Séries Temporais com Diferenciações Inteira e Fracionária

### 2.1. O modelo $ARIMA(p,d,q)$

Os modelos de séries temporais do tipo Auto-regressivo Integrado de Média Móvel,  $ARIMA(p,d,q)$ , são utilizados para realizar previsões de séries homogêneas nos casos em que se supõem um grau de diferenciação inteira, de acordo com a seguinte formulação:

$$\Phi(L)(1-L)^d (y_t - \mu) = \Theta(L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

onde  $y_t$  é a série temporal,  $\mu$  é a média da série,  $\varepsilon_t$  é o termo aleatório,  $\Phi(L) = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$  e  $\Theta(L) = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)$ . As raízes da equação característica  $\Phi(L)$  estão sobre ou fora do círculo unitário. Se todas as raízes de  $\Phi(L)$  estiverem fora do círculo unitário, ou seja,  $d = 0$ , o modelo  $ARIMA(p, d, q)$  passa a ser um  $ARMA(p, q)$ . Caso contrário,  $\Phi(L)$  tem  $d$  raízes fora do círculo unitário. Empiricamente, assume-se que o nível de integração  $d$  nos modelos do tipo Auto-regressivo Integrado de Média Móvel é igual a 1 ou 2 (Pindyck e Rubinfeld, 1981).

## 2.2. O modelos ARFIMA(p,d,q)

Formalmente, a suposição de diferenciação inteira é arbitrária. É possível modelar uma série temporal considerando que  $d$  pode assumir valores não inteiros. Esses modelos são denominados *ARFIMA* (Auto-regressivo Fracionário Integrado de Média Móvel). O parâmetro de diferenciação fracionária  $d$ , no modelo *ARFIMA*, pode ser estimado pelo procedimento semiparamétrico proposto por Geweke e Porter-Hudack (1983). Este procedimento é baseado na estimação da regressão espectral mostrada abaixo:

$$\ln\{I(\xi_\lambda)\} = \beta_0 + \beta_1 \ln\left\{\sin^2\left(\frac{\xi_\lambda}{2}\right)\right\} + \eta_\lambda, \quad \lambda = 1, \dots, v$$

onde  $\ln\{I(\xi_\lambda)\}$  é o periodograma de  $y_t$  na frequência  $\xi$ ,  $\xi_\lambda = 2\pi\lambda/T$  ( $\lambda = 0, \dots, T-1$ ) representa as ordenadas harmônicas da amostra,  $T$  é o número de observações da série  $y_t$  e  $v = g(T)$  é o número de ordenadas harmônicas incluídas na regressão espectral. Geweke e Porter-Hudack (1983) recomendam usar  $v = T^\alpha$  ordenadas harmônicas, onde  $\alpha = 0,5$ . Alguns autores variam o valor de  $\alpha$  para examinar a sensibilidade de  $d$  ao número de ordenadas harmônicas (Barkoulas e Baum, 1997). O valor de  $d = -\beta_1$ .

A diferenciação fracionária pode ser obtida através de expansão binomial, da seguinte forma (Diebold e Rudebusch, 1989):

$$(1-L)^d = 1 - dL + \frac{d(d-1)}{2!} L^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} L^3 + \dots, \text{ ou}$$

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)L^j}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)}$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama ou fatorial generalizada.

Os valores de  $d$  fracionário variam de  $-1,0$  a  $1,0$ , e podem ser interpretados de acordo com o esquema representado abaixo (Hosking, 1981; Jin e Frechete, 2004):

**Tabela 1.** Características do  $d$  fracionário

| Características do processo           | $d$           |              |     |             |             |     |
|---------------------------------------|---------------|--------------|-----|-------------|-------------|-----|
|                                       | $[-1 \ -0,5]$ | $(-0,5 \ 0)$ | $0$ | $(0 \ 0,5)$ | $[0,5 \ 1)$ | $1$ |
| Estacionário                          |               |              |     |             |             |     |
| Não-estacionário                      |               |              |     |             |             |     |
| Memória curta                         |               |              |     |             |             |     |
| Memória longa                         |               |              |     |             |             |     |
| Antipersistente                       |               |              |     |             |             |     |
| Variância indefinida                  |               |              |     |             |             |     |
| Raiz unitária<br>(variância infinita) |               |              |     |             |             |     |
| Ruído Branco                          |               |              |     |             |             |     |
| Atípico em séries econômicas          |               |              |     |             |             |     |

Nota: colchetes representam intervalos fechados e parênteses intervalos abertos.

Hosking (1981), mostra que a função de autocorrelação  $\rho(\cdot)$  do modelo *ARFIMA* é proporcional a  $k^{2d-1}$ . Assim, quando  $d$  é maior do que  $-0,5$  e menor ou igual a  $0$  a função de autocorrelação cai hiperbolicamente. O processo é de memória-curta, ou seja, os valores atuais são pouco correlacionados com valores passados. Neste caso, diz-se também que o processo é antipersistente, ou seja, se a série se afastar do seu nível médio, volta em seguida ao seu nível inicial.

No caso de  $d$  assumir valores maiores do que  $0$  e menores do que  $0,5$ , a função de autocorrelação também cai hiperbolicamente mas em um nível mais elevado do que o caso de memória-curta, e o processo

é dito de memória-longa. Ou seja, os valores presentes guardam uma grande correlação com os valores passados.

Quando  $d$  é maior do que 0,5 e menor do que 1,0, a função de autocorrelação do modelo *ARFIMA* aumenta a medida que  $k$  cresce, e a variância do processo é indefinida. O processo é dito estacionário se o  $d$  fracionário assumir valores maiores do que -0,5 e menores do que 0,5; caso contrário a série é dita não-estacionária.

### 2.3. Modelagem da volatilidade do erro

Os modelos de séries temporais do tipo *ARIMA* (ou *ARMA*) assumem que a variância da série  $y_t$  é constante. Essa suposição, no entanto, pode ser restritiva, especialmente no caso de preços no mercado financeiro. Engle (1982), propõe que, se houver uma relação entre erro quadrado do modelo e seus valores defasados, o processo de estimação deve considerar a modelagem do erro com uma estrutura *ARCH* (heteroscedasticidade condicional auto-regressiva). Ou seja,

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h}$$

onde

$$h = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

onde  $\alpha_0$  e  $\alpha_i$  são os parâmetros e  $v_t$  é o termo aleatório da regressão do erro quadrado do modelo contra seus valores defasados. Bollerslev (1986) estendeu a abordagem de Engle para um tratamento generalizado da variância condicional do erro (modelo *GARCH*).

Bollerslev (1986) afirmou que em muitas aplicações os modelos *ARCH*( $q$ ) necessitam de grandes  $q$  para evitar problemas de variâncias negativas, conseqüentemente uma defasagem fixa devia ser imposta (Engle, 1982). Os modelos *GARCH*( $p, q$ ) podem ser classificados como uma extensão dos modelos *ARCH*, permitindo tanto uma memória longa, como uma estruturada de defasagem flexível, sem ter que, *a priori*, fixar nenhuma defasagem.

Os modelos *ARCH*( $q$ ), como normalmente possuem um grande valor de  $q$ , mantêm elevadas persistências. Já o modelo *GARCH*( $p, q$ )

constitui uma tentativa de expressar de forma parcimoniosa a dependência temporal da variância condicional. O modelo GARCH é apresentado a seguir:

$$h = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

A equação anterior, função de variância condicional, é dependente de três fatores:

- A média  $\alpha_0$ ;
- Informações sobre a volatilidade passada mensurada pelo termo do erro quadrático defasado  $\varepsilon_{t-i}^2$  (o termo ARCH);
- Variância dos períodos anteriores,  $\sigma_{t-i}^2$  (o termo GARCH).

O modelo é conhecido como GARCH (p,q), onde  $p$  se refere à ordem de auto-regressão<sup>1</sup> e  $q$  aos efeitos dos erros passados sobre a volatilidade presente (Greene, 2000).

Esta especificação é freqüentemente interpretada dentro de um contexto financeiro, onde um agente ou *trader* prevê a variância do período pela formulação de um termo médio de longo prazo (a constante), a previsão de variância dos últimos períodos (termo GARCH), e a informação sobre a volatilidade nos últimos períodos (ARCH). Se o retorno do ativo tiver expectativa de grandes variações, tanto para cima, como para baixo, então o *trader* irá aumentar sua estimativa de variância para o próximo período.

Seja um modelo ARCH, pode-se testar a hipótese de que a variância dos erros é constante  $\sigma^2 = \alpha_0$ , contra a hipótese alternativa de erros seguindo um processo ARCH, de ordem a determinar. Segue, portanto, as hipóteses:

$$H_0: \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$$

$$H_1: \alpha_i \neq 0, \text{ para pelo menos algum } i = 1, \dots, q$$

O teste é fundamentado pelo procedimento clássico de Fisher, ou pelo teste do multiplicador de Lagrange (LM). Neste trabalho optou-se pelo teste de Bourbonnais e Terraza (1998) em razão de sua natureza prática como instrumento de aferição.

<sup>1</sup>  $p$  se refere ao período de tempo em que as volatilidades passadas ainda afetam o tempo presente.



Uma observação importante foi feita por Bourbonnais e Terraza (1998): um processo ARCH só é justificado até a ordem  $q = 3$ , a partir de 3 usam-se os modelos GARCH, que apresentam resultados pelo menos tão bons quanto, porém mais parcimoniosos.

Supondo-se que o modelo em análise é um caso de heterocedasticidade condicional, pode-se testar a especificação ARCH contra a GARCH. A hipótese nula é que os erros são do tipo ARCH, já a hipótese alternativa é que os erros são GARCH. As duas hipóteses são as seguintes:

$$H_0: \delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_p = 0$$

$$H_1: \delta_i \neq 0, \text{ para pelo menos algum } i = 1, \dots, p$$

O teste é realizado segundo a metodologia do Q-teste de Ljung-Box (Enders, 1995).

### 3. Estratégia Empírica

#### 3.1. Base de dados

Para o presente trabalho foram utilizados dados de contratos futuros negociados na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) de cinco *commodities*: açúcar, café, boi gordo, milho e soja. Os contratos de açúcar usados para na estimação equivaleram ao período de 03/01/2000 a 24/05/2004. Para o café, o período de estimação foi de 08/12/1999 a 24/05/2004. No caso do boi gordo, os dados corresponderam ao período de 29/09/2000 a 24/05/2004. Para os contratos futuros de milho, o período de estimação foi de 26/10/2001 a 24/05/2004. Por fim, os contratos futuros de soja equivaleram ao período de 11/10/2002 a 24/05/2004. As previsões para as cinco *commodities* foram realizadas de 25/05/2004 a 07/06/2004<sup>2</sup>.

#### 3.2. Processo de estimação dos modelos ARMA/ARIMA

A construção dos modelos do tipo ARMA/ARIMA requer o conhecimento prévio da ocorrência de raízes unitárias no processo estocástico. Portanto, deve-se primeiro realizar um teste estatístico para examinar

<sup>2</sup> Para a definição dos contratos futuros agropecuários ver [www.bmf.com.br](http://www.bmf.com.br)

a estacionariedade da série. O teste recomendado é o Dickey-Fuller Aumentado (ADF), que pode ser representado como segue:

$$\Delta y_t = a_0 + \gamma y_{t-1} + a_2 t + \sum_{i=2}^p \beta_i \Delta y_{t-i+1} + \varepsilon_t$$

onde  $a$ ,  $\gamma$  e  $\beta$  são parâmetros, e  $t$  é a tendência.<sup>3</sup> A escolha do modelo de melhor ajuste para a realização do teste ADF baseia-se em testes de hipótese para  $a_0$ ,  $a_2$ , e  $\beta_i$ . O teste de raiz unitária é realizado no parâmetro  $\gamma$  e tem a seguinte regra de decisão:

$H_0$  : não-estacionariedade;

$H_1$  : estacionariedade.

A distribuição do teste ADF é a  $\tau$ , construída através de experimento de Monte Carlo realizado por Dickey e Fuller (Enders, 1995).

O teste ADF é usado para definir o nível de diferenciação inteira ( $d$ ) do modelo de séries temporais. Se  $d = 0$  o modelo será estimado como um  $ARMA(p, q)$ . Se a série for não-estacionária homogênea ( $d$  igual a 1 ou 2), então o modelo será estimado como um  $ARIMA(p, d, q)$ . O passo seguinte é a identificação do modelo. Ou seja, definir qual a memória auto-regressiva ( $p$ ) e de média móvel ( $q$ ) do modelo. Na prática, selecionam-se os modelos de melhor ajuste usando-se estatísticas como o Critério de Informação de Akaike (AIC), Critério Bayesiano de Schwartz (SBC) e a estatísticas  $Q$  de Box-Pierce-Ljung, da seguinte forma:

$$AIC = T \ln(\text{soma do quadrado dos resíduos}) + 2n$$

$$SBC = T \ln(\text{soma do quadrado dos resíduos}) + n \ln(T)$$

onde  $T$  é o número total de observações utilizáveis,  $n$  é o número de parâmetros a serem estimados e  $\ln$  refere-se ao logaritmo natural. Quanto menor o valor de AIC e SBC, melhor o ajuste do modelo.

A estatística  $Q$  de Box-Pierce-Ljung é um teste conjunto de significância das autocorrelações dos resíduos. A estatística é calculada da seguinte forma:

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^s \rho_k^2 / (T-k),$$

onde  $\rho$  é a função de autocorrelação amostral,  $k$  o número de defasagens dos erros autocorrelacionados e  $s$  é o número de autocorrelações

<sup>3</sup> O operador de diferença  $\Delta = (1 - L)$

entre os erros considerados. Em geral considera-se  $s = 24$ . Ou seja, testa-se a significância conjunta das 24 primeiras autocorrelações (Enders, 1995). O teste tem distribuição  $\chi^2$  com  $s$  graus de liberdade. A hipótese nula é de não-autocorrelação dos resíduos. É possível que mais de um modelo possam ser selecionados de acordo com os critérios descritos. Pode-se também utilizar o critério do erro quadrado médio da previsão *ex-post* (EQM) como um critério de decisão entre modelos. O erro quadrado médio é calculado da seguinte forma:

$$EQM = \sum_{l=1}^n [y_{t+l} - \hat{y}_t(l)]^2$$

onde  $l$  representa o período de previsão além do tempo  $t$  e  $n$  o número de períodos de previsão. No caso da previsão *ex-post*,  $y_{t+l}$  representa o conjunto de observações da série a ser comparado com os valores previstos pelo modelo. Os valores previstos do modelo são calculados da seguinte forma:

$$\hat{y}_t(l) = \phi_1 y_{t+l-1} + \dots + \phi_p y_{t+l-p} - \theta_1 \varepsilon_{t+l-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t+l-q}$$

O melhor modelo, portanto, é aquele que apresenta o menor erro quadrado médio da previsão *ex-post*.

### 3.3. Processo de estimação do modelo ARFIMA

A estimação do  $d$  fracionário é obtida através da regressão espectral mostrada anteriormente. Objetivando testar a sensibilidade de  $d$  com relação ao número de ordenadas harmônicas, o  $\alpha$  será permitido assumir os valores 0,500, 0,555 e 0,600. Estimado o valor de  $d$ , a série transformada por diferenciação fracionária é obtida por expansão binomial. Em seguida, estima-se o modelo de previsão seguindo a mesma metodologia usada nos modelos do tipo ARMA. Depois de se obter os números previstos com o modelo de melhor ajuste, faz-se o inverso da expansão binomial para se obter os valores previstos comparáveis aos valores da série original.

#### 4. Resultados

A Tabela 2 apresenta as estatísticas do teste ADF para avaliar a presença de raiz unitária para os retornos das quatro *commodities* consideradas. Como podem ser observado, os resultados indicam a ausência de raízes unitárias já que o valor calculado do teste é menor que o valor crítico.

**Tabela 2.** Teste ADF

| Série                     | ADF calculado |
|---------------------------|---------------|
| Açúcar                    | -30.82        |
| Café                      | -26.48        |
| Milho                     | -26.44        |
| Soja                      | -18.69        |
| Boi Gordo                 | -29.26        |
| Valor crítico a 5%: -2,86 |               |

Na Tabela 3 está representado o resultado do teste de Engle para verificar a presença de heterocasticidade, bem como, evidência de suporte ao modelo ARCH. Há pelo menos 20 defasagens do modelo ARCH para as séries açúcar e boi gordo e 10 defasagens para a série de milho. Entretanto, não existe evidência estatística de suporte dos efeitos heterocedásticos para a série de café arábico e de soja.

**Tabela 3.** Teste de Engle para as *commodities*

| Defasagens | Açúcar | Café    | Milho   | Soja    | Boi    | Valor Crítico |
|------------|--------|---------|---------|---------|--------|---------------|
| 5          | 0.3690 | 46.4175 | 0.1004  | 17.6714 | 1.4889 | 11.0705       |
| 10         | 0.4539 | 55.7252 | 0.1952  | 20.0084 | 2.6390 | 18.3070       |
| 15         | 0.5908 | 57.0066 | 74.8320 | 30.7233 | 4.6603 | 24.9958       |
| 20         | 0.8149 | 57.9196 | 74.0798 | 35.7222 | 6.9357 | 31.4104       |

Observa-se que as defasagens propostas na Tabela 3 tornariam os modelos pouco parcimoniosos. A alternativa é o uso do modelo GARCH, confirmada pelo Q-teste do quadrado do retorno das séries apresentados na Tabela 4. Observa-se que nem a série de contrato futuro do café nem a da soja tem valores da estatística menores que os valores críticos.

**Tabela 4.** Q-teste para o quadrado do retorno das séries

| Defasagens | Açúcar | Café    | Milho   | Soja    | Boi    | Valor Crítico |
|------------|--------|---------|---------|---------|--------|---------------|
| 5          | 0.3729 | 53.1458 | 0.1025  | 16.1097 | 1.3205 | 11.0705       |
| 10         | 0.4664 | 73.6247 | 0.1950  | 19.1553 | 2.1147 | 18.3070       |
| 15         | 0.6148 | 74.3852 | 80.8480 | 30.3531 | 3.3982 | 24.9958       |
| 20         | 0.8558 | 76.9688 | 80.9171 | 33.8497 | 4.5738 | 31.4104       |

Já a estimação do  $d$  fracionário para valores de  $\alpha$  iguais a 0.500, 0.555 e 0.600, está apresentada na Tabela 5 abaixo.

**Tabela 5.** Valores de  $d$  para o modelo ARFIMA

|                  | Açúcar (d) | Café (d) | Milho (d) | Soja (d) | Boi (d) |
|------------------|------------|----------|-----------|----------|---------|
| $\alpha = 0,500$ | -0.04930   | 0.03625  | 0.11128   | 0.13346  | 0.03387 |
| $\alpha = 0,555$ | -0.03229   | 0.01084  | 0.14864   | 0.11652  | 0.04103 |
| $\alpha = 0,600$ | -0.06379   | 0.03479  | 0.12655   | 0.00699  | 0.03109 |

Os valores de  $d$  da Tabela 5 mostram que todas as *commodities* são estacionárias. Entretanto, a série do açúcar apresentou um comportamento estacionário de memória curta; sendo desta forma antipersistente. As demais *commodities* apresentaram-se persistentes. A antipersistência pode estar relacionada à eficiência de mercado. É possível que a possibilidade de substituição de produção entre açúcar e álcool nas empresas torne mais rápida a resposta da oferta aos estímulos do mercado.

Com base nos valores de  $d$ , foram estimados modelos ARFIMA e ARMA, ambos com erros do tipo GARCH. A seleção dos modelos levou em consideração os critérios AIC, SBC, os testes  $Q$ , e a previsão ex-post. Com base neste resultado os modelos selecionados estão apresentados nas Tabelas 6, 7, 8, 9 e 10, e apresentados a seguir para cada uma das séries. O critério do erro quadrático médio da previsão também foi usado para efeito da escolha dos modelos.

A Tabela 6 mostra os resultados para a série do contrato futuro do açúcar. Observa-se significância estatística em todos os parâmetros, exceção ao termo  $\alpha_1$  do modelo ARMA/GARCH.

De acordo com o  $Q$  - teste os modelos com melhores propriedades esta-

tísticas foram os ARFIMA (2;d;2)/GARCH (1,1)<sup>4</sup> nos modelos de diferenciação fracionários, e o ARMA (2,2)/GARCH (2,1) na diferenciação inteira.

Uma análise entre os melhores modelos de cada grupo, via o poder de previsão ex-post, medido pelo erro quadrático médio (EQM), indica superioridade do modelo ARFIMA (2;0,5;2)/GARCH (1,1). A diferença entre os modelos é significativa, como pode ser observado no EQM do ARFIMA (2;0,5;2)/GARCH (1,1) 41 % menor que o EQM do ARFIMA (2;0,555;2)/GARCH (1,1) (segundo melhor).

A avaliação dos parâmetros do modelo de volatilidade heterocedástica condicional mostra o caráter persistente<sup>5</sup> da volatilidade. Tal situação, de acordo com Diebold (1986), pode ser provocada pela não incorporação no modelo da mudança da volatilidade não-condicional da série em análise. Dito de outra forma, a existência de períodos onde a volatilidade real é significativamente maior que a média pode produzir volatilidade estimada via modelos GARCH superiores à média. As Figuras A1 e A2 apresentam esta situação.

A persistência da volatilidade da série de açúcar pode ter sido motivada pela ocorrência de rupturas bruscas de tendência. Esse fenômeno é provocado pela característica própria do mercado de açúcar, o qual apresenta uma resposta rápida da indústria a choques de oferta. Tal característica pode inviabilizar a estimação do modelo de volatilidade do tipo GARCH.

Para a série do contrato futuro do café, cujos resultados estão na Tabela 7, o modelo que apresentou menor EQM foi o ARFIMA (1;0,6;1)/GARCH (1,1), com diferenças quando comparados aos demais modelos ARFIMA (máximo de 2,5 %). Em comparação ao modelo ARMA o ganho dos modelos ARFIMA, em termo de propriedades estatísticas, foi pelo menos 20 vezes superior.

Todos os parâmetros podem ser considerados significativos e, de uma forma geral, os modelos parcimoniosos foram superiores. A persistência dos modelos pode ser considerada baixa, pois varia de 0,878 a 0,889.

A baixa persistência da série, ao contrário da série de açúcar, mostra que o comportamento da volatilidade é condizente com o comporta-

<sup>4</sup> ARFIMA (2, 2)/GARCH (1, 1) com d onde  $\alpha = 0,500, 0,555$  ou  $0,600$ .

<sup>5</sup> A persistência dos modelos GARCH é obtida pela soma dos parâmetros alfas e betas. Quanto mais próximo da unidade for tal soma, maior a persistência.

mento dos preços futuros da *commodity*. O volume de negócios deste papel na BM&F pode ser uma das principais razões para a estabilidade da série (a estabilidade pode ser observada nas Figuras A3 e A4). Pode-se afirmar que, entre as *commodities* analisadas, a série de retornos do café é a que detém mais características incorporadas pelos modelos GARCH e ARFIMA.

**Tabela 6.** Resumo dos resultados para a seleção do modelo de previsão para o açúcar.

| Parâmetro  | ARMA(2,2) /<br>GARCH (2,1) |          | <i>d</i> (0,500)           |          | <i>d</i> (0,555)          |        | <i>d</i> (0,600)           |        |
|------------|----------------------------|----------|----------------------------|----------|---------------------------|--------|----------------------------|--------|
|            | Valor                      | t        | Valor                      | t        | Valor                     | t      | Valor                      | t      |
| C          | -1,168 x 10 <sup>-03</sup> | -3,696   | -4,961 x 10 <sup>-03</sup> | -3,473   | -1,29 x 10 <sup>-03</sup> | -2,092 | -1,320 x 10 <sup>-03</sup> | -2,329 |
| $\phi_1$   | 1,348                      | 136,576  | -1,222                     | -477,411 | -0,26176                  | -3,299 | -0,251                     | -3,866 |
| $\phi_2$   | -0,941                     | -112,649 | -0,989                     | -399,863 | 0,72534                   | 9,324  | 0,736                      | 11,568 |
| $\theta_1$ | -1,340                     | -376,940 | 1,210                      | 914,089  | 0,40097                   | 4,221  | 0,416                      | 5,249  |
| $\theta_2$ | 0,977                      | 381,082  | 0,999                      | 826,455  | -0,59823                  | -6,330 | -0,583                     | -7,390 |
| K          | 1,248 x 10 <sup>-04</sup>  | 11,094   | 9,097 x 10 <sup>-05</sup>  | 9,403    | 8,96 x 10 <sup>-05</sup>  | 10,425 | 9,054 x 10 <sup>-05</sup>  | 10,527 |
| $\alpha_1$ | 8,755x10 <sup>-09</sup>    | 0,000    | 0,542                      | 19,671   | 0,57243                   | 8,752  | 0,570                      | 30,277 |
| $\alpha_2$ | 0,424                      | 18,315   |                            |          |                           |        |                            |        |
| $\beta_1$  | 0,576                      | 16,318   | 0,458                      | 14,551   | 0,42757                   | 11,728 | 0,430                      | 19,396 |
| EQM        | 9,95 x 10 <sup>-05</sup>   |          | 5,653 x 10 <sup>-05</sup>  |          | 9,570 x 10 <sup>-05</sup> |        | 6,555 x 10 <sup>-04</sup>  |        |

Obs. C = constante do modelo ARMA (ARFIMA) K = constante do modelo GARCH

A Tabela 8 mostra que a série de retornos do contrato futuro de boi gordo teve um comportamento semelhante, em termo de poder de previsão, ao contrato do café arábico. Sendo o modelo mais indicado para esta série de dados o ARFIMA (2;0,6;1) / GARCH (2,0) com pequenas diferenças entres os modelos ARFIMA.

Os parâmetros encontrados, apesar de significantes, mostram um senso em relação à Tabela 4. Não havia evidência de efeitos dos erros passados sobre a volatilidade presente. Assim sendo, no modelo conjunto de previsão (de preços e volatilidade), a previsão da volatilidade não exerce impacto significativo sobre os resultados. A análise da Figura A6 mostra que se trata de uma série com baixa volatilidade (observar a escala), ou seja, uma relativa estabilidade nos preço (Figura A5).

**Tabela 7.** Resumo dos resultados para a seleção do modelo de previsão para o café.

| Parâmetro  |                            |         | <i>d</i> (0,500)             |        | <i>d</i> (0,555)             |        | <i>d</i> (0,600)             |        |
|------------|----------------------------|---------|------------------------------|--------|------------------------------|--------|------------------------------|--------|
|            | ARMA(2,2) /<br>GARCH (1,1) |         | ARFIMA(1,1) /<br>GARCH (1,1) |        | ARFIMA(1,1) /<br>GARCH (1,1) |        | ARFIMA(1,1) /<br>GARCH (1,1) |        |
|            | Valor                      | t       | Valor                        | t      | Valor                        | t      | Valor                        | t      |
| C          | $-7,834 \times 10^{-04}$   | -0,677  | $-4,85 \times 10^{-04}$      | -0,749 | $-7,780 \times 10^{-04}$     | -0,893 | $-7,3034 \times 10^{-04}$    | -0,752 |
| $\phi_1$   | -0,748                     | -13,577 | -0,426                       | -2,238 | -0,363                       | -1,708 | -0,421                       | -2,187 |
| $\phi_2$   | 0,066                      | 1,971   |                              |        |                              |        |                              |        |
| $\theta_1$ | 0,812                      | 21,433  | 0,469                        | 2,497  | 0,426                        | 2,055  | 0,465                        | 2,451  |
| K          | $6,112 \times 10^{-05}$    | 4,017   | $6,133 \times 10^{-05}$      | 4,038  | $6,097 \times 10^{-05}$      | 4,058  | $6,132 \times 10^{-05}$      | 4,813  |
| $\alpha_1$ | 0,762                      | 3,072   | 0,768                        | 3,079  | 0,779                        | 3,111  | 0,767                        | 22,031 |
| $\beta_1$  | 0,117                      | 4,438   | 0,111                        | 4,453  | 0,110                        | 4,504  | 0,111                        | 7,1907 |
| EQM        | $3,274 \times 10^{-04}$    |         | $7,205 \times 10^{-05}$      |        | $7,330 \times 10^{-05}$      |        | $7,148 \times 10^{-05}$      |        |

**Tabela 8.** Resumo dos resultados para a seleção do modelo de previsão para o boi gordo.

| Parâmetro  |                            |           | <i>d</i> (0,500)             |           | <i>d</i> (0,555)             |           | <i>d</i> (0,600)             |            |
|------------|----------------------------|-----------|------------------------------|-----------|------------------------------|-----------|------------------------------|------------|
|            | ARMA(2,2) /<br>GARCH (2,0) |           | ARFIMA(2,2) /<br>GARCH (1,0) |           | ARFIMA(2,1) /<br>GARCH (2,0) |           | ARFIMA(2,1) /<br>GARCH (2,0) |            |
|            | Valor                      | t         | Valor                        | t         | Valor                        | t         | Valor                        | t          |
| C          | $1,258 \times 10^{-3}$     | 14,950    | $1,141 \times 10^{-3}$       | 1,342     | $6,407 \times 10^{-4}$       | 1,197     | $6,573 \times 10^{-4}$       | 1,227      |
| $\phi_1$   | -1,040                     | -118,606  | -1,062                       | -12,082   | -0,757                       | -5,878    | -0,748                       | -5,847     |
| $\phi_2$   | -0,702                     | -85,404   | -0,721                       | -8,964    | $2,832 \times 10^{-3}$       | 0,069     | $1,202 \times 10^{-2}$       | 0,299      |
| $\theta_1$ | 1,061                      | 122,753   | 1,068                        | 12,248    | 0,747                        | 5,961     | 0,749                        | 6,016      |
| $\theta_2$ | 0,726                      | 88,546    | 0,734                        | 8,958     |                              |           |                              |            |
| K          | $2,750 \times 10^{-5}$     | 565,817   | $3,012 \times 10^{-5}$       | 57,270    | $5,616 \times 10^{-5}$       | 61,200    | $4,297 \times 10^{-5}$       | 60,403     |
| $\alpha_1$ | 0,328                      | 12660,505 | 0,532                        | 47476,335 | 0,044                        | 6176,324  | 0,279                        | 567250,220 |
| $\alpha_2$ | 0,245                      | 7842,032  |                              |           | $8,791 \times 10^{-2}$       | 20088,600 | $5,722 \times 10^{-2}$       | 39744,600  |
| EQM        | $1,234 \times 10^{-4}$     |           | $2,042 \times 10^{-5}$       |           | $2,600 \times 10^{-5}$       |           | $1,834 \times 10^{-5}$       |            |

Os resultados da série de contrato futuro de milho (Tabela 9) guarda semelhanças com a série do boi gordo. A primeira delas é a significância dos parâmetros estimados. A não adequação do modelo GARCH na estimação da volatilidade, segunda semelhança, verificada pela ausência do parâmetro  $\alpha$ . Assim sendo, não há evidência de efeitos da volatilidade passada sobre a volatilidade corrente, corroborando com os resul-



tados da Tabela 4 (nas Figuras A7 e A8 estão, respectivamente o preço futuro e o retorno dos contratos de milho no período em questão).

Em relação à capacidade explicativa é evidente a superioridade do modelo ARFIMA (2;0,555;1) / GARCH (2,1). Deve ser ressaltado que a superioridade é significativa em relação ao modelo de diferenciação inteira, entre os modelos de diferenciação fracionária os resultados são semelhantes.

**Tabela 9** – Resumo dos resultados para a seleção do modelo de previsão para o milho.

| Parâmetro  |                         |        | <i>d</i> (0,500)             |        | <i>d</i> (0,555)             |        | <i>d</i> (0,600)             |        |
|------------|-------------------------|--------|------------------------------|--------|------------------------------|--------|------------------------------|--------|
|            |                         |        | ARFIMA(1,1) /<br>GARCH (0,1) |        | ARFIMA(2,1) /<br>GARCH (2,1) |        | ARFIMA(1,1) /<br>GARCH (0,1) |        |
|            | Valor                   | t      | Valor                        | t      | Valor                        | t      | Valor                        | t      |
| C          | 2,672x 10 <sup>-3</sup> | 4,659  | 2,580x 10 <sup>-3</sup>      | 4,700  | 4,246x 10 <sup>-4</sup>      | 1,312  | 2,566x 10 <sup>-3</sup>      | 4,477  |
| $\phi_1$   | 0,573                   | 12,463 | 0,488                        | 8,498  | 1,177                        | 10,931 | 0,476                        | 7,743  |
| $\phi_2$   |                         |        |                              |        | -0,246                       | -4,176 |                              |        |
| $\theta_1$ | -0,104                  | -1,728 | -0,130                       | -1,834 | -0,854                       | -9,257 | -0,133                       | -1,663 |
| K          | 2,379x 10 <sup>-4</sup> | 0,116  | 2,351 x 10 <sup>-4</sup>     | 11,550 | 2,264x 10 <sup>-4</sup>      | 11,670 | 2,347x 10 <sup>-4</sup>      | 11,417 |
| $\alpha_1$ |                         |        |                              |        | 9,674e-09                    | 0,000  |                              |        |
| $\alpha_2$ |                         |        |                              |        | 5,416x 10 <sup>-5</sup>      | 0,008  |                              |        |
| $\beta_1$  | 1,000                   | 20,723 | 1,000                        | 20,488 | 1,000                        | 20,250 | 1,000                        | 19,785 |
| EQM        | 2,710x 10 <sup>-4</sup> |        | 1,800x 10 <sup>-4</sup>      |        | 1,650x 10 <sup>-4</sup>      |        | 1,712x 10 <sup>-4</sup>      |        |

Por fim os resultados da Tabela 10 para o contrato futuro de soja. Apesar da quantidade de dados inferior às séries de milho e de boi gordo, os resultados sugerem melhores propriedades estatísticas dos modelos propostos a esta série (de soja).

Conforme esperado em função do apresentado nas Tabelas 3 e 4 os parâmetros dos modelos GARCH foram significantes e tal modelo apresentou persistência compatível com o comportamento real da série (observar Figuras A9 e A10).

O modelo ARMA (1;2)/GARCH (1, 1) para a série de soja superou os modelos ARFIMA em relação ao menor EQM. Esse resultado sugere um melhor exame dos processos de modelagem para a previsão da série de soja, uma vez que esse resultado destoa daqueles encontrados para as demais *commodities*.

Tanto a série de preço, quanto a sua volatilidade podem ser consideradas estacionárias. Este comportamento das séries pode estar associado à relativa eficiência oriunda das negociações deste contrato, uma vez que o ativo objeto está inserido, na atualidade, no cenário internacional<sup>6</sup>.

**Tabela 10** – Resumo dos resultados para a seleção do modelo de previsão para a soja.

| Parâmetro  |                            |        | $d(0,500)$                 |         | $d(0,555)$                   |         | $d(0,600)$                 |        |
|------------|----------------------------|--------|----------------------------|---------|------------------------------|---------|----------------------------|--------|
|            | ARMA(1,2) /<br>GARCH (1,1) |        | ARMA(1,2) /<br>GARCH (1,1) |         | ARFIMA(1,1) /<br>GARCH (1,1) |         | ARMA(1,2) /<br>GARCH (1,1) |        |
|            | Valor                      | t      | Valor                      | t       | Valor                        | t       | Valor                      | t      |
| C          | $4,400 \times 10^{-5}$     | 1,360  | $4,019 \times 10^{-5}$     | 1,559   | $3,923 \times 10^{-5}$       | 1,700   | $4,378 \times 10^{-5}$     | 1,372  |
| $\phi_1$   | 0,945                      | 36,579 | 0,918                      | 30,632  | 0,924                        | 42,964  | 0,944                      | 36,302 |
| $\theta_1$ | -0,870                     | -9,860 | -0,974                     | -10,640 | -0,980                       | -82,170 | -0,875                     | -9,901 |
| $\theta_2$ | -0,110                     | -1,342 | $-5,568 \times 10^{-3}$    | -0,064  |                              |         | -0,104                     | -1,268 |
| K          | $5,114 \times 10^{-5}$     | 7,036  | $5,064 \times 10^{-5}$     | 6,870   | $5,086 \times 10^{-5}$       | 7,076   | $5,113 \times 10^{-5}$     | 7,025  |
| $\alpha_1$ | 0,627                      | 12,890 | 0,633                      | 12,784  | 0,631                        | 13,090  | 0,628                      | 12,877 |
| $\beta_1$  | 0,163                      | 4,577  | 0,158                      | 4,436   | 0,159                        | 4,573   | 0,162                      | 4,565  |
| EQM        | $7,552 \times 10^{-4}$     |        | $8,554 \times 10^{-4}$     |         | $8,769 \times 10^{-4}$       |         | $1,628 \times 10^{-3}$     |        |

## 5. Considerações Finais

O presente trabalho examinou as propriedades de longa dependência dos retornos de cinco *commodities* agrícolas brasileiras. Os resultados mostram indícios de que a dependência temporal entre as observações de uma série de retornos de preços futuros pode ser função do tipo de ativo examinado. Ou seja, para *commodities* em que a resposta da oferta é mais rápida, as características de longa dependência tenderiam a ser de natureza antipersistente. Caso contrário, haveria uma dependência mais forte entre as observações não contemporâneas. À exceção da série de soja, o modelo *ARFIMA* apresentou um menor erro quadrado médio da previsão em todas as demais estimativas, apesar da pequena diferença em alguns casos.

<sup>6</sup> O Brasil atualmente é o segundo maior exportador de soja do mundo.

Apenas o açúcar apresenta sensibilidade, possivelmente em função da característica antipersistente da série. A quantidade de ordenadas harmônicas de baixa frequência, refletida no valor da estatística  $d$ , não mudou a classificação de dependência das séries. Da mesma forma, não houve mudança significativa na eficiência do modelo ARFIMA no que se refere ao seu poder de previsão.

Como sugestão para pesquisas futuras fica a comparação de mercados nacionais com internacionais, utilizando as bolsas de Chicago, Londres e outras; podendo, desta forma, verificar-se a eficiência comparativa dos mercados e identificar as características estruturais que influenciam o comportamento da volatilidade das séries de *commodities*.

## 6. Referências bibliográficas

Barkoulas, J. T. e Baum, C. F. Fractional differencing modeling and forecasting of eurocurrency deposit rates. *The Journal of Financial Research*. Vol. XX, No. 3, pp 355-372, fall 1997.

BM&F, Bolsa de Mercadorias e Futuros – São Paulo, Brasil ([www.bmf.com.br](http://www.bmf.com.br)).

Bollerslev, T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, pp 307-27, 1986.

Bourbonnais R. e M. Terraza, “Analyse Des Séries Temporelles En Economie”, Press Universitaire de France, Paris, 1998.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., e Reinsel, G. C. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. 3<sup>rd</sup> Ed, Prentice-Hall, EUA, 1994.

Diebold, F. X. e Rudebusch, G. D. Long memory and persistence in aggregate output. *Journal of Monetary Economics*. 24, pp 189-209, 1989.

Enders, W. *Applied Econometrics Time Series*. John Wiley and Sons, Inc. 1995.

Engle, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, pp.987-1007, 1982.

Engle, R. F e Bollerslev, T “Modeling the Persistence Conditional Variance (with discussion)”. *Econometrics Reviews*, n. 5, p. 1-50, 80-87, 1986.

Geweke, J. e Porter-Hudack, S. The estimation and application of long-memory time séries models. *Journal of Time Séries Analysis*. 4, pp 221-238, 1983.

Gouriéroux, C. “ARCH Models and Financial Applications”. New York: Springer-Verlag, 1997.

Greene, W. H. “Econometric Analysis”. 4ª ed. New Jersey: Prentice Hall, Upper River. 2000.

Hosking, J. R. M. Fractional differencing. *Biometrika*. 68, 1, pp. 165-76, 1981.

Jin, H. J. e Frechete, D. L. Fractional integration in agricultural futures prices volatilities. *American Journal of Agricultural Economics*, 86, 2, maio de 2004.

Pindyck, R. e Rubinfeld, D. *Econometric Models and Economic Forecast*. McGraw-Hill, EUA, 1981.

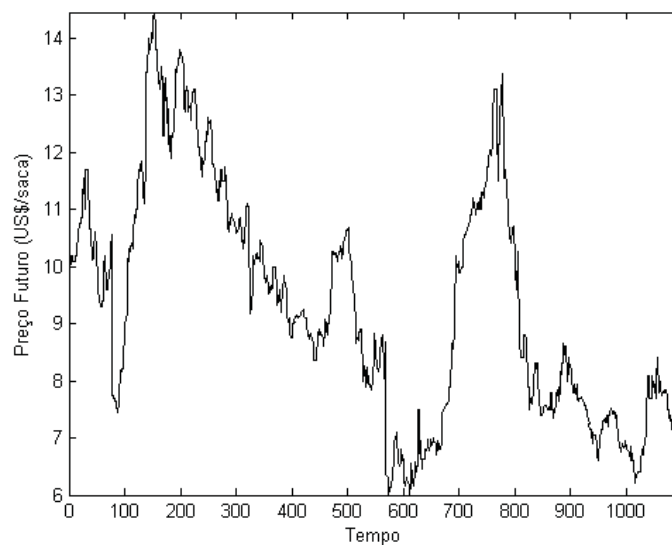
Schittenkopf C., A. Lehar, E M. Scheicher, “GARCH vs Stochastic Volatility: Option Pricing and Risk Management.”. < [www.gloriamundi.org](http://www.gloriamundi.org) > , 2002.

Taylor, S. J. “Modeling Financial Times Séries”. UK: John Wiley & Sons, 1986.

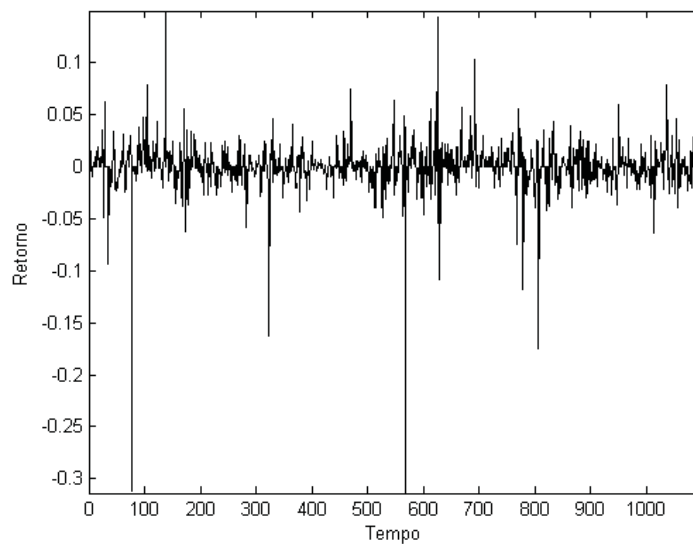
Weiss, A. A., “ARMA Models with ARCH Errors”, *Journal of Time Séries Analysis*, vol. 5, 1984.

## Apêndice

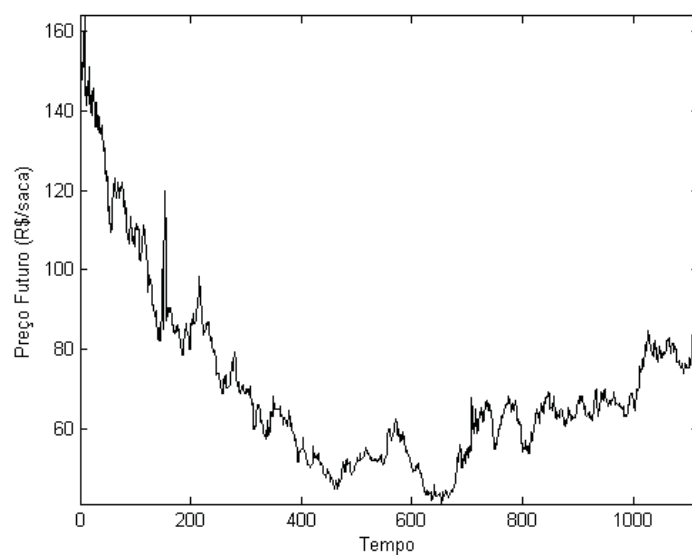
**Figura A1.** Preço futuro do açúcar (03/01/2000 a 07/06/2004).



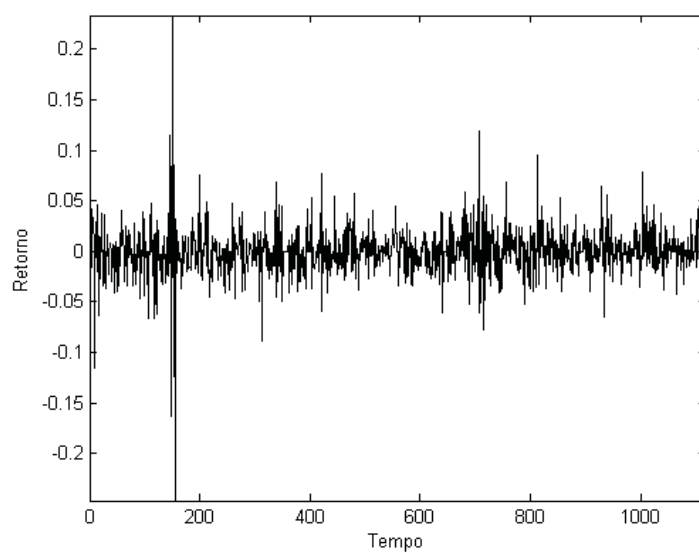
**Figura A2.** Retorno do contrato futuro do açúcar (03/01/2000 a 07/06/2004).



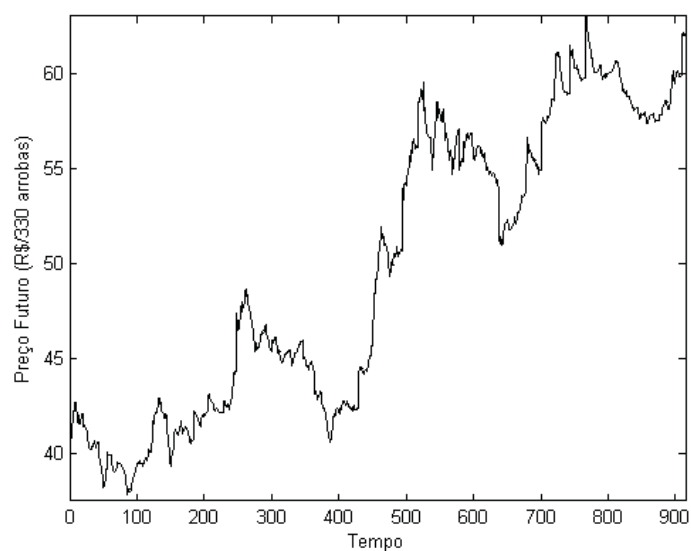
**Figura A3.** Preço futuro do café arábico (08/12/1999 a 07/06/2004)



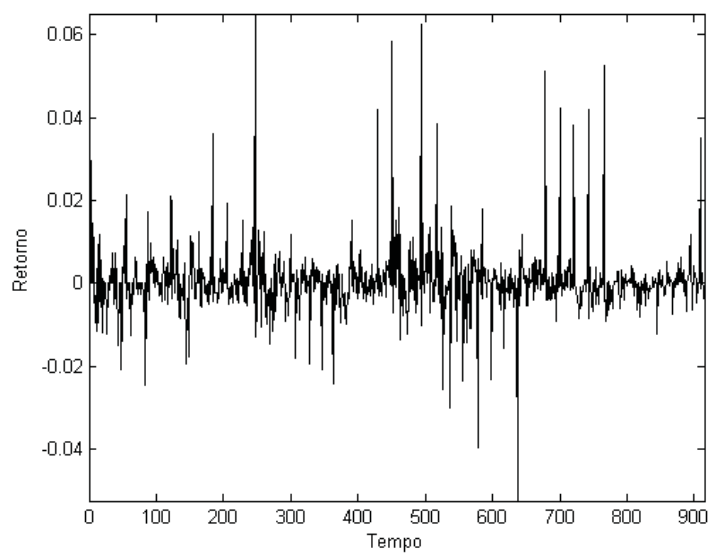
**Figura A4.** Retorno do contrato futuro do café arábico (08/12/1999 a 07/06/2004)



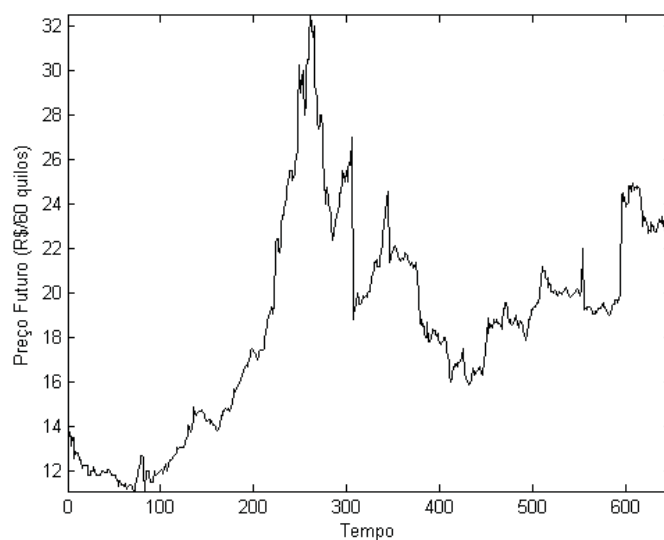
**Figura A5.** Preço futuro do boi gordo (29/09/2000 a 07/06/2004)



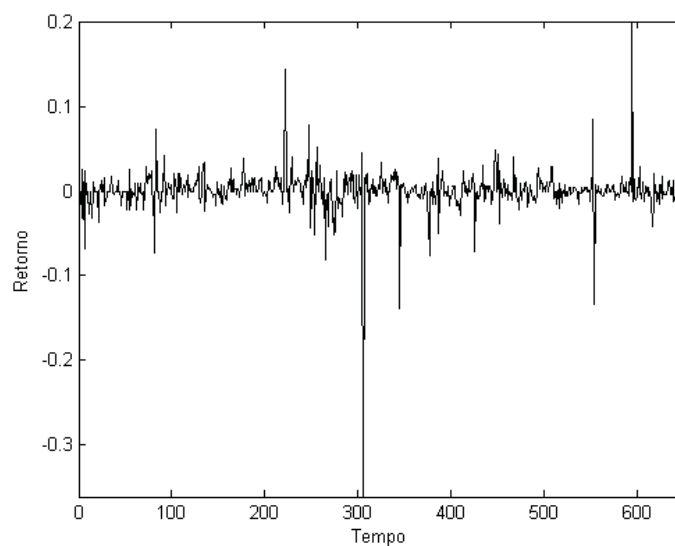
**Figura A6.** Retorno do contrato futuro do boi gordo (29/09/2000 a 07/06/2004)



**Figura A7.** Preço futuro do milho (26/10/2001 a 07/06/2004)

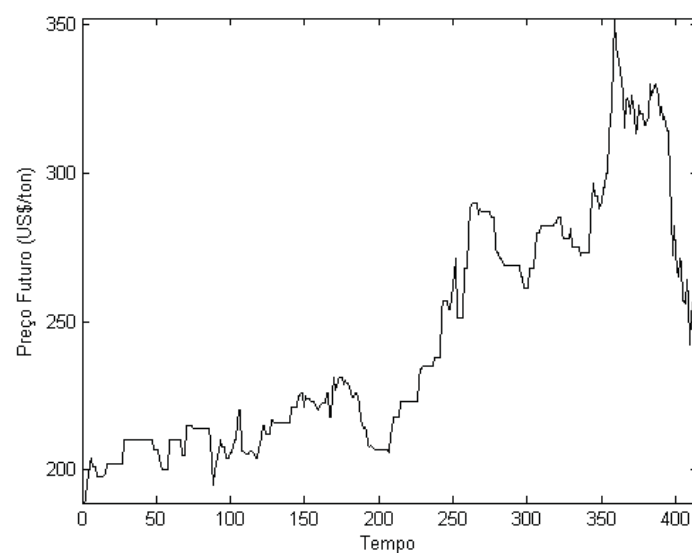


**Figura A8.** Retorno do contrato futuro do milho (26/10/2001 a 07/06/2004)

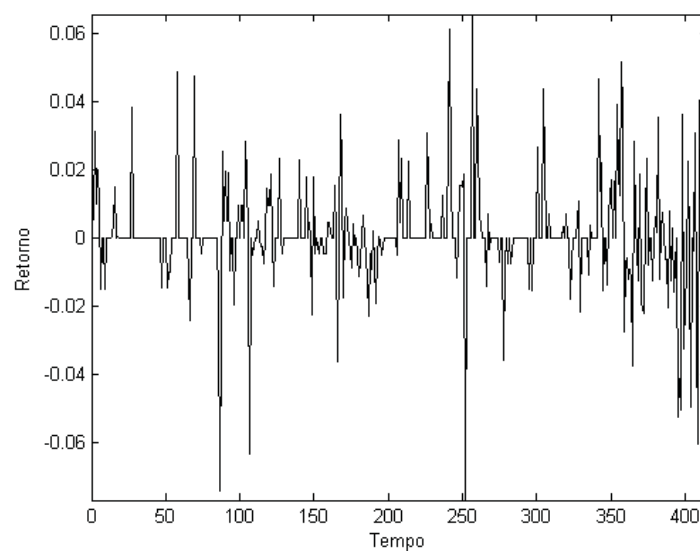




**Figura A9.** Preço futuro da soja (11/10/2002 a 07/06/2004)



**Figura A10.** Retorno do contrato futuro da soja (11/10/2002 a 07/06/2004)



*Recebido em março de 2006 e revisto em dezembro de 2006.*