



The World's Largest Open Access Agricultural & Applied Economics Digital Library

This document is discoverable and free to researchers across the globe due to the work of AgEcon Search.

Help ensure our sustainability.

Give to AgEcon Search

AgEcon Search

<http://ageconsearch.umn.edu>

aesearch@umn.edu

*Papers downloaded from **AgEcon Search** may be used for non-commercial purposes and personal study only. No other use, including posting to another Internet site, is permitted without permission from the copyright owner (not AgEcon Search), or as allowed under the provisions of Fair Use, U.S. Copyright Act, Title 17 U.S.C.*

No endorsement of AgEcon Search or its fundraising activities by the author(s) of the following work or their employer(s) is intended or implied.

HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁS ALKALMAZÁSA AZ ÁRUNÖVÉNY-TERMELÉS OPTIMÁLIS ARÁNYAINAK MEGHATÁROZÁSÁRA

BARTOS ATTILA dr.

Ismeretes, hogy a *lineáris programozás* olyan feladatokat old meg, amelyekben a megoldás (illetve megoldások) a lineáris egyenlőtlenség-rendszer és egyenlőségek teljesítése mellett valamely célfüggvény minimumát vagy maximumát is biztosítja.

A *nem-lineáris programozási* feladatok közé azokat soroljuk, amelyekben vagy az egyenlőtlenség-rendszer és egyenlőségek, vagy a célfüggvény, esetleg mindkettő tartalmaz nem-lineáris tagot vagy tagokat.

E cikkben azzal az esettel foglalkozunk, amikor a *korlátozó feltételek* (egyenlőtlenségek, egyenlőségek) *lineárisak*, a *célfüggvény* pedig *lineáris törtfüggvény*.

Amikor a korlátozó feltételek lineárisak, a célfüggvény pedig lineáris törtfüggvény, akkor a feladatot *hiperbolikus* programozási feladatnak nevezzük. Erre a problémára a megoldást *Martos B. (2)* dolgozta ki 1960-ban.

A módszer jelentőségét az adja, hogy a megoldás lényegében a szimplex-módszerrel történik, bár az indulótáblázat némileg más, bővebb, s a megoldás során új lépést is beiktatunk. A célfüggvény új tartalmat nyer, s így egyszerre két szélsőértéket is figyelembe véve adódik a megoldás, ugyanis a számláló maximumát és a nevező minimumát kapjuk.

EGY GYAKORLATI FELADAT MEGFOGALMAZÁSA

A következőkben egy olyan gazdaságról lesz szó, amelyet *Csete L. a Lányfalvi—Csete: Tervezés és információ a mezőgazdaságban* (1) c. könyvben leírt és mint modellgazdaságot, költség és hozam tekintetében részletesen elemzett, s a *kiindulási* változat mellett *fejlesztési* változatot is javasolt a növénytermelés és az állattartás számára. A jelen feladatban szereplő ráfordítási együtthatók innen származnak.

Most az egyszerűség kedvéért csak a növénytermeléssel foglalkozunk. Feltesszük, hogy a gazdaság árunövény-termeléssel foglalkozik, így nem

1. táblázat

A SZÁMÍTÁSBA JÖVŐ NÖVÉNYEK TECHNIKAI-TECHNOLÓGIAI KOEFFICIENSEI
1 KH TERÜLETRE VONATKOZÓAN

Termelési tényezők	Mennyi- ségi egység	Búza (x_1 kh)	Takar- mány- gabona (x_2 kh)	Kuko- rica (x_3 kh)	Takar- mány- borsó (x_4 kh)	Cukor- répa (x_5 kh)	Napra- forgó (x_6 kh)	Burgo- nya (x_7 kh)	Vörös- hagyma (x_8 kh)	Rendel- kezésre álló kapacitás
Élő munka	mnap	2,02	2,72	7,00	2,89	11,45	5,62	15,18	67,68	17 300
Műtrágya	q	4,53	3,34	11,11	4,36	5,93	5,84	3,88	4,00	16 200
Istállótrágya	q	20,39	16,30	34,16	0,00	80,00	29,66	40,00	16,00	71 600
Lófogat	lófnap	0,00	0,45	0,30	0,60	2,00	0,60	1,23	0,70	1 100
Traktorüzem	nh	8,11	6,15	9,73	5,69	18,28	6,16	12,98	10,86	24 000
Gépkocsi	gkóra	1,34	0,30	0,00	0,00	6,48	0,00	0,72	4,84	3 000
Kombájn	kh	1,00	1,00	1,55	1,40	0,00	1,05	0,00	0,00	2 900
Terület	kh	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	2 790

okoz problémát, ha a feladat megoldása során nem kerül az optimális termelési programba az összes eddig termesztett növény. Egyébként is, különböző korlátok beiktatásával bármely növényre tetszőleges előírásokat tehetünk, ami biztosítja az illető növénynek a termesztésben való részvételt.

Az árunövény-termelésben az induló programban 8 növényt szerepeltetünk, amelyek területe az említett fejlesztési változatban 2790 kh volt.

A feladat a következő: *határozzuk meg a búza (x_1 kh), a takarmánygabona (x_2 kh), a kukorica (x_3 kh), a takarmányborsó (x_4 kh), a cukorrépa (x_5 kh), a napraforgó (x_6 kh), a burgonya (x_7 kh) és a vöröshagyma (x_8 kh) olyan optimális vetésterületeit, amelyek mellett a maximális termelési értéket tudjuk biztosítani, a lehető legkisebb ráfordítással.* Másképpen fogalmazva: a korlátozó feltételek adta lehetőségek figyelembevételével és kihasználásával a hozam—ráfordítás hányadost maximáljuk.

A feladat első részéből kitűnik, hogy a feltételi egyenlőtlenség-rendszer lineárisan fel tudjuk írni. Korlátozó feltételként vesszük figyelembe az élő munkát, a műtrágyát, az istállótrágyát, a lófogatot, traktorok, gépkocsik teljesítményét és a kombájn munkát.

A különböző növények területegységre szükséges ráfordításigényeit, továbbá az azokból rendelkezésre álló kapacitásokat az 1. táblázatban foglalom össze. Természetesen sokkal helyesebb a ráfordításokat nem évi összegben figyelembe venni, mint ahogyan ez a jelen példában történt, hanem minél finomabb bontásban (negyedévi, havi), de a módszer bemutatásához az évi összegek is megfelelnek.

A rendelkezésre álló kapacitásokat úgy határozhatjuk meg, hogy azok pontosan fedezzék a korábban említett fejlesztési változat szükségleteit.

A célfüggvény

A korlátozó feltételek megfogalmazása után kerülhet sor a célfüggvény meghatározására. Célul tűzhetjük ki egyrészt azt, hogy az egyes növények

termelési költségeinek az összege az optimális termelési szerkezetben a lehető legkisebb legyen. Tehát az említett növények területeinek s az egyes növények területegységre jutó költségeinek ismeretében felírhatunk egy lineáris célfüggvényt. Az ebben szereplő konstans az állandó költségeket jelöli (gazdasági általános költség és adó). Az együtthatók ezer forintban mutatják az egyes növények termelési költségeit. Tehát írhatjuk, hogy

$$3,1x_1 + 2,1x_2 + 5,9x_3 + 2,1x_4 + 7,2x_5 + 2,7x_6 + 8,9x_7 + 11,2x_8 + 9,1 = \min.$$

Ha csak a költségek minimálását tűznénk ki célul, akkor a feladat lineáris programozási feladat lenne.

Tovább menve, másrészt célul tűzzük ki azt is, hogy a *termelési értékek* összege a lehető legnagyobb legyen. Ismét ezer forintban kifejezve az együtthatókat, írhatjuk a következőket:

$$8x_1 + 5,1x_2 + 9,3x_3 + 3,1x_4 + 13,8x_5 + 4,8x_6 + 23,9x_7 + 18,8x_8 = \max.$$

Ha a termelési értékek maximumát határoznánk meg, a termelési költségek figyelmen kívül hagyásával, akkor ez egy másik lineáris programozási feladathoz vezetne.

Tűzzük ki most célul azt, hogy a *termelési értékek és a termelési költségek a hányadosa*, tehát a hozam—ráfordítás viszony legyen maximális. Ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a termelési értékek összegét elosztjuk a termelési költségek összegével:

$$\frac{8x_1 + 5,1x_2 + 9,3x_3 + 3,1x_4 + 13,8x_5 + 4,8x_6 + 23,9x_7 + 18,8x_8}{3,1x_1 + 2,1x_2 + 5,9x_3 + 2,1x_4 + 7,2x_5 + 2,7x_6 + 8,9x_7 + 11,2x_8 + 9,1} = \max.$$

Ezen racionális törtfüggvény, mint célfüggvény, akkor lesz maximális, ha vagy a számlálót növeljük, vagy a nevezőt csökkentjük.

A hiperbolikus programozás során ezt a célt fogjuk közelíteni, de nem mindig a maximális termelési érték vagy a minimális költség változóinak a bevonásával, hanem egy harmadik sor t_i elemei alapján vonjuk be a változókat a programba.

Az indulótáblázat összeállítása

Az indulótáblázat felső része megegyezik a lineáris programozás során készítendő táblázattal.

Felírjuk az

$$Ax \leq b$$

korlátozó feltételeknek megfelelő együttható-matrixot és a b oszlopvektor elemeit.

A célfüggvény két sorból áll, a c^T és a d^T sorvektor elemeiből, s ezeket az A együttható-matrix megfelelő elemei alá írjuk. Végül a legutolsó sorba

a t_i elemeket írjuk be, amelyeknek számítása a következő összefüggés alapján történik:

$$t_i = c_0 \cdot d_i - d_0 \cdot c_i,$$

ahol c_0 a konstans termelési érték, d_0 a konstans termelési költség, c_i és d_i pedig az i -edik növény területegységre jutó termelési értéke, illetve termelési költsége. A behelyettesítés ezen képlete az indulótáblázatból könnyen elvégezhető.

Példaként álljon itt t_1 kiszámítása:

$$t_1 = c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1 = 0 \cdot 3,1 + 9,1 \cdot 8 = 72,8$$

(Lásd a 2. táblázatban.)

Az indulótáblázat sémája az általános jelölésekkel a következő:

	x					
u	A					b
c^T d^T	c_1 d_1	c_2 d_2	$\dots$ $\dots$	c_n d_n	c_0 d_0	
t_i	t_1	t_2	$\dots$	t_n	$\frac{c_0}{d_0}$	

A táblázat utolsó sorának utolsó eleme a célfüggvény mindenkori értékét mutatja. Az indulótáblázatunkban ez most 0, ugyanis:

$$\frac{c_0}{d_0} = \frac{0}{-9,1} = 0$$

Ezek alapján írjuk fel most a mi feladatunk indulótáblázatát. A behelyettesítést a 2. táblázatban találjuk.

A táblázatban soronként vannak feltüntetve az 1 kh-nyi terület ráfordításféleségei, valamint a területre vonatkozó kikötés. A c jelű sorban a termelési értékeket találjuk, utolsó eleme 0, ugyanis konstans termelési érték nines. A d jelű sorba írtuk be a termelési költségeket, ennek legutolsó eleme az állandó költség: 9,1.

A legutolsó sorban találjuk a t_i elemeket, amelyeknek képzéséről fentebb volt szó. Mint látjuk, a célfüggvény értéke induláskor 0, amit a táblázat legutolsó sorának legutolsó eleme mutat.

A programozás a szimplex-módszerrel történik. A generáló elemet a t_i sor alapján keressük, mindig a legnagyobb t_i felett. A programozást addig folytatjuk, amíg a t_i sor minden eleme negatív nem lesz.

2. táblázat

INDULÓTÁBLÁZAT A HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁSHOZ

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
u_1	2,02	2,72	7,00	2,89	11,45	5,62	15,18	67,68	17 300
u_2	4,53	3,34	11,11	4,36	5,93	5,84	3,88	4,00	16 200
u_3	20,39	16,30	34,16	0	80,00	29,66	40,00	16,00	71 600
u_4	0	0,45	0,30	0,60	2,00	0,60	1,23	0,70	1 100
u_5	8,11	6,15	9,73	5,69	18,28	6,16	12,98	10,86	24 000
u_6	1,34	0,30	0	0	6,48	0	0,72	4,84	3 000
u_7	1	1	1,55	1,40	0	1,05	0	0	2 900
u_8	1	1	1	1	1	1	1	1	2 790
c	8,0	5,1	9,3	3,1	13,8	4,8	23,9	18,8	0
d	3,1	2,1	5,9	2,1	7,2	2,7	8,9	11,2	-9,1
t	72,8	46,4	84,6	28,2	125,6	43,7	217,5	171,1	0

AZ OPTIMÁLIS MEGOLDÁS ÉRTÉKELÉSE

A megoldás során tapasztalhattuk, hogy a generáló elem kiválasztása az egyes új táblázatokra való áttéréskor mindig a szűk keresztmetszetű kapacitásokra hívta fel a figyelmet. Ezek a lófogat-, a traktor- és az élőmunka-kapacitás voltak. A kapott eredmények elsősorban a kapacitások bővítésével javíthatók tovább. A megoldást itt nem ismertetem, ezért az indulótáblázat után csak a legutolsó, ún. eredménytáblázatot mutatom be.

A túloldalon közölt 3. táblázatból olvasható ki a megoldás. Eszerint a termesztendő növények és azok területe a következő:

Őszi búza	(x_1)	1519,5 kh
Burgonya	(x_7)	887,8 kh
Vöröshagyma	(x_8)	11,1 kh
Összesen		2418,4 kh

Az indulóprogramban szereplő 2790 kh-ból eszerint a program nem vett igénybe 371,6 kh-t, amit — a megmaradó kapacitások segítségével — más növények termelésére lehet fordítani.

Az indulótáblázatban feltüntetett 8 árunövényből mindössze három került az optimális termelési programba, abba, amely a hozam—ráfordítás viszonyt maximálja.

3. táblázat

A HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁS EREDMÉNYTÁBLÁZATA

	u_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_4	u_1	
x_8	-0,004	-0,055	0,029	-0,075	-0,215	-0,030	-0,167	0,017		11,1
u_2	-0,578	1,133	6,503	2,814	1,163	4,038	2,702	0,002		5 827,0
u_3	-2,570	-2,698	7,496	-19,069	-11,210	10,104	-8,637	0,263		4 920,9
x_7	0,002	0,397	0,261	0,531	1,748	0,505	0,908	-0,009		887,8
x_1	0,125	0,195	0,819	-0,047	-0,255	-0,008	-1,227	-0,007		1 519,5
u_6	-0,150	0,018	-1,145	0,044	6,603	-0,207	1,798	-0,061		270,8
u_7	-0,125	0,805	0,731	1,447	0,255	1,058	1,227	0,007		1 380,5
u_8	-0,123	0,507	-0,051	0,591	-0,278	0,533	0,486	0,000		371,6
c	-0,977	-4,925	-2,936	-7,797	-21,901	-6,641	-8,749	-0,030		-33 583,1
d	-0,371	-1,552	1,299	-1,810	-5,655	-1,503	-2,793	-0,043		-12 736,2
t	-8,889	-46,833	-26,749	-70,970	-199,298	-60,423	-79,619	-0,276		2,636

Nézzük ezek után a kiindulásul vett fejlesztési változat és a hiperbolikus programozás segítségével kapott optimális termelési program hozamait és ráfordításait

	Fejlesztési változat szerinti		Optimális program szerinti	
	termelési érték (1000 Ft)	termelési költség (1000 Ft)	termelési érték (1000 Ft)	termelési költség (1000 Ft)
Búza	8 160	3 162	12 156,0	4 710,5
Takarmánygabona	3 060	1 260	—	—
Kukorica	5 580	3 540	—	—
Takarmányborsó	372	252	—	—
Cukorrépa	2 070	1 080	—	—
Napraforgó	720	405	—	—
Burgonya	1 673	623	21 218,4	7 901,4
Vöröshagyma	1 504	896	208,7	124,3
Összesen	23 139	11 218	33 583,1	12 736,2

Látható tehát, hogy a hiperbolikus programozás a 11 218 eFt helyett 12 736,2 eFt költséggel 23 139 eFt helyett 33 583,1 eFt bruttó termelési értéket biztosít.

A termelési költség növekedése mindössze 1518,2 eFt, ami 13,5%-os növe-

kedésnek felel meg, s ennek árán 10 444,1 cFt termelési érték emelkedést nyerhetünk, ami 45,1%-os növekedés.

Nagyon szemléletesen jut kifejezésre a hiperbolikus programozás előnyös volta, ha a hozam—ráfordítás mutatójának segítségével hasonlítjuk össze a fejlesztési változat és az optimális árunövény-termelési szerkezet eredményeit.

A fejlesztési változat hozam—ráfordítás viszonya:

$$\frac{23\,139\text{ cFt}}{11\,218\text{ cFt}} = 2,062$$

A hiperbolikus programozással kapott eredmény hozam—ráfordítás viszonya pedig:

$$\frac{33\,583,1\text{ cFt}}{12\,736,2\text{ cFt}} = 2,636$$

Érdeemes megnézni, hogy a fejlesztési változat és az optimális program által javasolt szerkezetek mellett a területegységre jutó termelési értékek és termelési költségek hogyan alakultak:

	Termelési érték (1000 Ft/kh)	Termelési költség (1000 Ft/kh)
Fejlesztési változat	8,29	4,02
Optimális program	13,88	5,26

Amíg tehát az 1 kh-ra jutó költség 1,24 cFt-tal növekedett, addig a termelési érték 5,59 cFt-tal emelkedett.

A területegységre jutó tiszta jövedelem pedig megkétszereződött, mert nagysága:

a fejlesztési változatban	4,27 cFt
az optimális szerkezetben	8,62 cFt.

A hiperbolikus programozás segítségével egy adott termelési szerkezet kapacitásait felhasználva olyan termelési programot sikerült meghatározni, amelyik sokkal gazdaságosabb, mint az eredeti volt.

A bemutatott feladat megoldása után elmondhatjuk, hogy a hiperbolikus programozás alkalmazásával a hozam—ráfordítás viszonyt optimálisabbá tehetjük, mint egyéb módszerekkel.

I R O D A L O M

- (1) *Lányfalvi-Csöte*: Tervezés és információ a mezőgazdaságban. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1968. — (2) *Martos B.*: Hiperbolikus programozás. Az MTA Matematikai Kutatóintézetének Közleményei. B. sor. 1960. 4. sz. 383—406. o.

При помощи одного из методов нелинейного программирования — гиперболического программирования — возможно формулирование такой производственной структуры, которая является оптимальной с точки зрения затрат-выпуска. С помощью применения этого метода удалось так изменить производственную структуру одного хозяйства производящего товарные культуры, что при 13,5% повышении производственных затрат должен быть достигнут 45,1% рост стоимости валовой продукции и удвоится чистый доход. Автор в своей статье подробно показывает целевые функции, общие схемы отправных таблиц и конкретные расчеты.

Mit einer, nicht linearer Programmierungsmethode, mit der hyperbolischen Programmierung wird die Gestaltung einer solchen Produktionsstruktur ermöglicht, die hinsichtlich des Aufwand-Ertrag-Verhältnisses optimal ist. Mittels der angewandten Methode ist es gelungen die Produktionsstruktur eines Warenpflanzenbaubetriebes in solcher Weise zu modifizieren, dass man mit einer 13,5%-en Produktionskostenerhöhung, eine 45,1%-e Produktionswertsteigerung erreichen kann, und der Reinertrag sich verdoppeln soll. Im Bericht wurden die Zielfunktion, die verallgemeinerte Anfangsschematabelle sowie die konkreten Berechnungen beschrieben.

One of the non-linear programming methods i.e. hyperbolic programming renders the assessment of such a production structure possible where input-output relations are approximating the optimum. Through the application of this method, production structure of a commodity crop-growing farm could be modified so that 45.1 per cent increase of production value might be achieved by only a 13.5 per cent growth of production costs and net incomes might be doubled. Objective functions are described in details by the author and general schedule of the first Table as well as actual calculations are annexed.