



The World's Largest Open Access Agricultural & Applied Economics Digital Library

This document is discoverable and free to researchers across the globe due to the work of AgEcon Search.

Help ensure our sustainability.

Give to AgEcon Search

AgEcon Search

<http://ageconsearch.umn.edu>

aesearch@umn.edu

*Papers downloaded from **AgEcon Search** may be used for non-commercial purposes and personal study only. No other use, including posting to another Internet site, is permitted without permission from the copyright owner (not AgEcon Search), or as allowed under the provisions of Fair Use, U.S. Copyright Act, Title 17 U.S.C.*

No endorsement of AgEcon Search or its fundraising activities by the author(s) of the following work or their employer(s) is intended or implied.

ПРЕГЛЕДНИ ЧЛАНЦИ

Др Недељко Магдалиновић

Др Родољуб Јовановић

Мр Драгиша Станујкић

Факултет за менаџмент - Мегатренд универзитет - Зајечар

ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ У ФУНКЦИЈИ УПРАВЉАЊА ПРОЈЕКТИМА И ПРОИЗВОДЊОМ У МИНЕРАЛНОЈ ИНДУСТРИЈИ

Апстракт

Линеарно програмирање је врло корисна метода за оптимизацију циљева пројеката и производње у минералној индустрији, где се циљеви остварују у условима ограничених природних ресурса.

У раду се даје општи облик математичког модела линеарног програмирања пројеката и производње у минералној индустрији и нумерички пример његове примене у пракси.

Кључне речи: *пројекти у минералној индустрији, избор пројеката, управљање производњом, линеарно програмирање.*

LINEAR PROGRAMMING IN FUNCTION OF MANAGING PROJECTS AND PRODUCTION IN MINERAL INDUSTRY

Abstract

Linear programming is a very useful method for optimising projects goal and managing production in mineral industry where goals are accomplished in conditions of limited natural resources.

This study gives a general form of the mathematical model of linear programming of production projects in mineral industry and a numerical example of its application in practice.

Key words: *Projects in mineral industry, Choice of Projects, Managing production, Linear programming*

Увод

Производња у минералној индустрији, познатија у широј јавности као рударска производња, је врло сложена и ризична. Висок степен ризика проистиче из бројних неизвесности које носе природни услови експлоатације и тржиште метала.

За тако високоризичне производње и пројекте, од великог је значаја да се степен ризика остварења циљева сведе на најмању могућу меру. У томе, линеарно програмирање пружа велике и драгоцене могућности.

1. Теоријски аспекти линеарног програмирања пројеката и производње у минералној индустрији

У најопштијем случају, производња у минералној индустрији почива на експлоатацији, по квалитету и резервама, различитих лежишта или делова лежишта.

Нека производња, условног годишњег капацитета $Q = 1$, обухвата истовремену експлоатацију n лежишта или делова лежишта са различитим садржајем корисног метала: $k_1, k_2, \dots, k_n$; различитим садржајем корисних примеса: $p_1, p_2, \dots, p_n$ и различитим садржајем штетних примеса: $\check{s}_1, \check{s}_2, \dots, \check{s}_n$ и заједничку прераду такве смеше руде.

Циљна функција производње је приход по једној тони произведене смеше руде P , који се жели максимизирати, а дат је једначином:

$$(\max) P = X_1P_1 + X_2P_2 + \dots + X_nP_n \quad (1)$$

где је: $X_1, X_2, \dots, X_n$ - учешће производње руде из различитих лежишта или делова лежишта, (дел.јед.)

$P_1, P_2, \dots, P_n$ - приход по једној тони руде из појединих лежишта или делова лежишта, (дин/т)

Циљ треба остварити у условима одговарајућих ограничења, која се односе на годишњи капацитет производње, минимални садржај корисних компоненти и максимални садржај штетних примеса.

1. Годишња производња смеше руде Q је једнака:

$$Q = X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1 \quad (2)$$

2. Садржај корисног метала и корисних примеса у јединици масе произведене смеше руде не смеју бити мањи од доњег захтеваног садржаја ($k_{\min}$ и $p_{\min}$):

$$X_1k_1 + X_2k_2 + \dots + X_nk_n \geq k_{\min}$$

$$(3) \quad X_1 p_1 + X_2 p_2 + \dots + X_n p_n \geq p_{\min}$$

3. Садржај штетних примеса у јединици масе произведене смеше руде не сме бити већи од максимално дозвољеног садржаја $\check{s}_{\max}$:

$$(4) \quad X_1 \check{s}_1 + X_2 \check{s}_2 + \dots + X_n \check{s}_n \leq \check{s}_{\max}$$

Сагласно постављеном циљу и задатим ограничењима, модел линеарног програмирања производње гласи:

$$(5) \quad \begin{aligned} (\max) P &= X_1 P_1 + X_2 P_2 + \dots + X_n P_n \\ X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 1 \\ X_1 k_1 + X_2 k_2 + \dots + X_n k_n &\geq k_{\min} \\ X_1 p_1 + X_2 p_2 + \dots + X_n p_n &\geq p_{\min} \\ X_1 \check{s}_1 + X_2 \check{s}_2 + \dots + X_n \check{s}_n &\leq \check{s}_{\max} \\ X_1, X_2, \dots, X_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Број неједначина у систему ограничења зависи од броја параметара руде које треба ограничити, зависно од врсте руде и захтева технологије и тржишта.

Решавање модела методом линеарног програмирања своди се на одређивање учешћа производње руде из појединих лежишта или делова лежишта: $X_1, X_2, \dots, X_n$, у условима задатих ограничења, која обезбеђују максимизирање прихода по једној тони произведене смеше руде. Решавање модела врши се симплекс методом^{1,2}.

У дефинисању и избору рударских пројеката и управљања производњом циљна функција оптимизације могу бити и трошкови производње руде T , који се желе минимизирати. Нека су трошкови производње једне тоне руде из појединих лежишта: $T_1, T_2, \dots, T_n$. У том случају циљна функција су трошкови по једној тони произведене смеше руде, који се желе минимизирати. Сагласно усвојеним симболима, циљна функција гласи:

$$(\min) T = X_1 T_1 + X_2 T_2 + \dots + X_n T_n \quad (6)$$

Систем ограничења, у најопштијем облику, остаје исти као код модела максимизације прихода (5). Дакле, математички модел линеарног програмирања трошкова производње у минералној индустрији, у најопштијем облику, гласи:

$$(7) \quad \begin{aligned} (\min) T &= X_1 T_1 + X_2 T_2 + \dots + X_n T_n \\ X_1 + X_2 + \dots + X_n &= 1 \\ X_1 k_1 + X_2 k_2 + \dots + X_n k_n &\geq k_{\min} \\ X_1 p_1 + X_2 p_2 + \dots + X_n p_n &\geq p_{\min} \\ X_1 \check{s}_1 + X_2 \check{s}_2 + \dots + X_n \check{s}_n &\leq \check{s}_{\max} \end{aligned}$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

Примену математичких модела линеарног програмирања (5) и (7) у избору и управљању пројектима и производњом у минералној индустрији приказаћемо на једноставном примеру, са напоменом да су они применљиви на све могуће и најсложеније случајеве.

2. Нумерички пример

Рударска компанија врши истовремену експлоатацију и прераду смеше руде бакра из два оближња рудна тела А и В. Руда у рудном телу А садржи: 0,5 % бакра, 0,4 g/t злата и 2,5 % сумпора. Руда у рудном телу В садржи: 2,0 % бакра, 0,1 g/t злата и 20 % сумпора.

Приход по једној тони руде из рудног тела А износи 1200 din/t, а из рудног тела В 4500 din/t.

Компанија жели да производњу руде у рудним телима дефинише тако да да у смеши руде која иде у флотацију буде: најмање 1,0 % бакра, најмање 0,2 g/t злата и највише 10 % сумпора као штетне компоненте.

Задатак се своди на одређивање учешћа руде из рудних тела А и В у смеши која компанији обезбеђује максималан приход по једној тони произведене руде и истовремено задовољавају задата ограничења у погледу садржаја бакра, злата и сумпора у смеши.

На бази задатог пројектног и производног циља, најпре ћемо дефинисати функцију циља која, сагласно општој једначини (1) у овом задатку гласи:

$$(\max) P = 1200 X_1 + 4500 X_2$$

Ограничење које дефинише капацитет производње гласи:

$$X_1 + X_2 = 1,0$$

Ограничење које дефинише минимални садржај бакра у смеши гласи:

$$0,5 X_1 + 2 X_2 \geq 1,0$$

Ограничење које дефинише садржај злата у смеши гласи:

$$0,4 X_1 + 0,1 X_2 \geq 0,2$$

Ограничење које дефинише садржај сумпора у смеши гласи:

$$2,5 X_1 + 20 X_2 \leq 10$$

На основу дефинисане циљне функције и дефинисаних ограничења, математички модел линеарног програмирања производње гласи:

$$(\max) P = 1200 X_1 + 4500 X_2$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 1,0 \\ 0,5 X_1 + 2 X_2 &\geq 1,0 \\ 0,4 X_1 + 0,1 X_2 &\geq 0,2 \\ 2,5 X_1 + 20 X_2 &\leq 10 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Будући да дати математички модел линеарног програмирања садржи само две променљиве (X_1 и X_2), исти се може решити графичким поступком или симплекс методом¹. Модели линеарног програмирања са више од две променљиве могу се решити једино симплекс методом.

Овде се даје графички поступак решавања који ће читаоцима бити лако разумљив, док се са симплекс методом могу упознати из лако доступне и разноврсне литературе из области линеарног програмирања.

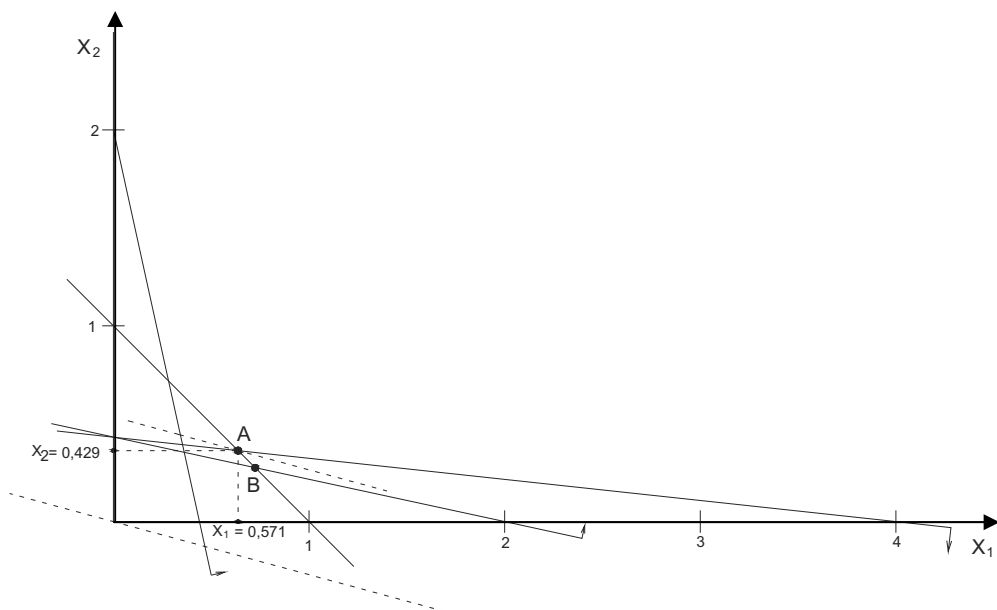
За графичко решавање неопходно је све неједначине у систему ограничења изразити у облику одговарајућих једначина:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 1,0 \\ 0,5 X_1 + 2 X_2 &= 1,0 \\ 0,4 X_1 + 0,1 X_2 &= 0,2 \\ 2,5 X_1 + 20 X_2 &= 10 \end{aligned}$$

Ради лакшег уцртавања правих, претходне једначине изразићемо у њиховом сегментном облику тако што ћемо једначине поделити са вредностима њихових слободних чланова на десној страни:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 1,0 \\ 0,5 X_1 + 2 X_2 &= 1,0 \\ 2 X_1 + 0,5 X_2 &= 1,0 \\ 0,25 X_1 + 2 X_2 &= 1,0 \end{aligned}$$

Све четири праве које одговарају задатим ограничењима приказане су на сл.1. Будући да у систему ограничења фигурира једначина $X_1 + X_2 = 1,0$, то само тачке које се налазе на дужи **AB** задовољавају сва задата ограничења.



Сл. 1 Графичко решење максимизације прихода

Оптимально решење задатка налази се у једној од екстремних тачака скупа могућих решења, за коју функција циља остварује максималну вредност.

У том циљу праву која репрезентује функцију циља уцртаћемо тако да пролази кроз координатни почетак. Наиме, из услова $P = 0$ следи:

$$P = 1200 X_1 + 4500 X_2 = 0$$

одакле је:

$$X_2 = -0,25 X_1$$

То омогућава лако уцртавање праве функције циља кроз координатни почетак. Транслацијом ове праве донајудаљеније тачке А од координатног почетка добијамо оптимально решење које гласи:

$$X_1 = 0,571$$

$$X_2 = 0,429$$

За ове вредности променљивих X_1 и X_2 , функција циља - приход по једној тони произведене смеше руде постаје максималан и износи:

$$(\max) P = 1200 \times 0,571 + 4500 \times 0,429 = 2615,7 \text{ din/t}$$

Провером у систем ограничења закључујемо да је он задовољен:

$$0,571 + 0,429 = 1,0 \quad (= 1,0)$$

Садржај бакра

$$0,5 \times 0,571 + 2 \times 0,429 = 1,14 \quad (\geq 1,0)$$

Садржај злата

$$0,4 \times 0,571 + 0,1 \times 0,429 = 0,27 \quad (\geq 0,2)$$

Садржај сумпора

$$2,5 \times 0,571 + 20 \times 0,429 = 10,0 \quad (\leq 10,0)$$

Сада ћемо у претходном нумеричком примеру променити само циљну функцију, уз задржавање истог система ограничења. Наиме, ако су трошкови производње једне тоне руде из лежишта **A** 600 дина/т, а из лежишта **B** 2000 дина/т, компанија жели да дефинише пројектно-производни програм тако да трошкови производње једне тоне смеше руде буду минимални. За овакав циљ, математички модел линеарног програмирања гласи:

$$(\min) T = 600 X_1 + 2000 X_2$$

$$X_1 + X_2 = 1,0$$

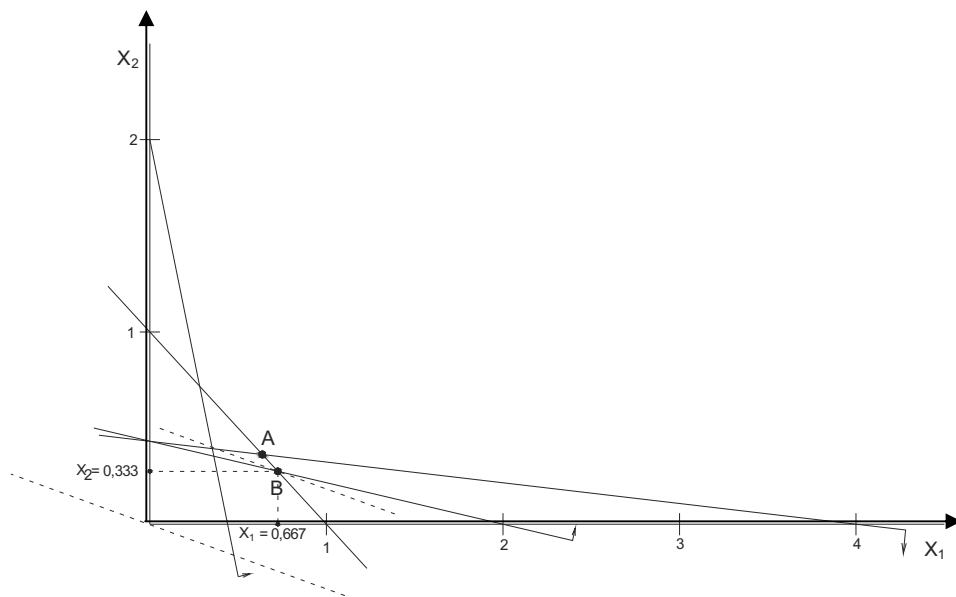
$$0,5 X_1 + 2 X_2 \geq 1,0$$

$$0,4 X_1 + 0,1 X_2 \geq 0,2$$

$$2,5 X_1 + 20 X_2 \leq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

И у овом случају приказаћемо само графички поступак оптимизације. На исти начин, као и код претходног модела максимизације прихода, уцртају се праве које представљају систем ограничења и праву која представља функцију циља (сл.2).



Сл. 2 Графичко решење минимизације трошкова

Ради налажења оптималног решења, праву која представља функцију циља (*испрекидана линија која пролази кроз координатни почетак*) транслаторно померамо до најближе тачке координатном почетку, а која припада скупу могућих решења. У овом случају је то тачка **В** на сл. 2, са координатама:

$$X_1 = 0,667$$

$$X_2 = 0,333$$

које представљају оптимално решење.

За ове вредности променљивих X_1 и X_2 , функција циља - трошкови по једној тони произведене смеше руде постају минимални и износе:

$$(\min) T = 600 \times 0,667 + 2000 \times 0,333 = 1066,2 \text{ дин/т}$$

Провером у систем ограничења, закључујемо да је он задовољен:

$$0,667 + 0,333 = 1,0 \quad (=1,0)$$

Садржај бакра

$$0,5 \times 0,667 + 2 \times 0,333 = 1,0 \quad (\geq 1,0)$$

Садржај злата

$$0,4 \times 0,667 + 0,1 \times 0,333 = 0,30 \quad (\geq 0,2)$$

Садржај сумпора

$$2,5 \times 0,667 + 20 \times 0,333 = 8,33 \quad (\leq 10,0)$$

Закључак

Линеарно програмирање је врло корисна метода за оптимизацију циљева пројеката и производње у минералној индустрији, где се циљеви остварују у условима ограничених природних ресурса и великог ризика. Висок степен ризика проистиче из бројних неизвесности које носе природни услови експлоатације и тржиште метала.

Већина проблема везана за максимизацију економских ефеката и минимизацију трошкова производње у минералној индустрији, почев од избора пројеката до њихове производне реализације, успешно се решавају методама линеарног програмирања.

Тиме се код избора пројеката и управљања производњом у минералној индустрији, као врло сложенем и високоризичном, степен ризика остварења циљева своди на најмању могућу меру.

Literatura

1. Magdalinović N., Jovanović R., Naučne osnove upravljanja projektima, Fakultet za menadžment Zaječar (2006)
2. Magdalinović N., The Model of Linear Programming of Projects in Mineral Industry. 39th IOCMM 2007., Sokobanja.