SCHRIFTEN DER GESELLSCHAFT FÜR WIRTSCHAFTS- UND SOZIALWISSENSCHAFTEN DES LANDBAUES E.V.

Seuster, H.: Programmierung mit nichtlinearer Zielfunktion. In: Reisch, E.: Quantitative Methoden in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaues. Schriften der Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaues e.V., Band 4, Münster-Hiltrup: Landwirtschaftsverlag (1967), S. 121-141
.

Programmierung mit nichtlinearer Zielfunktion

Von Dozent Dr. H. SEUSTER, Gießen

1	Die sachliche Notwendigkeit der nichtlinearen Programmierung	121
2	Die Untersuchungsmethode	122
3	Das praktische Beispiel	124
3.1	Datenermittlung und Ausgangslösung	124
3.2	Ergebnisse der nichtlinearen Planungsrechnung und der linearen Vergleichsrechnung	131
4	Besonderheiten der nichtlinearen Programmierung	133
4.1	Methodische Probleme	133
4.2	Sachliche Probleme	135
5	Folgerungen für Wissenschaft und Praxis	140
6	Zusammenfassung	141

1 Die sachliche Notwendigkeit der nichtlinearen Programmierung

Die mathematische Planungsrechnung hat sich in den letzten Jahren als hervorragendes Instrument zur Ermittlung optimaler landwirtschaftlicher Betriebsorganisationen erwiesen. Von allen bisher bekannten Verfahren hat dabei die Simplex-Methode der Linearplanung (lineare Planungsrechnung, lineare Optimierung, linear programming) die größte Bedeutung gewonnen. Indessen muß dieses Verfahren als Konzession der sachlichen Notwendigkeiten an die methodischen Möglichkeiten angesehen werden, denn der Algorithmus der Simplex-Methode unterstellt ausschließlich lineare Beziehungen zwischen allen Planungsdaten. In der ökonomischen Realität bestehen aber meistens oder zumindest vielfach nichtlineare Zusammenhänge. KÜNZI-KRELLE geben im Vorwort ihrer Arbeit [13, S. VI] eine Auswahl nichtlinearer Beziehungen in der Wirtschaft. Auch im Bereich der landwirtschaftlichen Produktion dominieren auf allen Ebenen (Faktor-Produkt, Faktor-Faktor, Produkt-Produkt) nichtlineare Relationen [s. z. B. 7; 9; 27]; das klassische Beispiel derartiger Beziehungen in der Landwirtschaft ist das „Ertragsgesetz“ [2; 18], welches den ökonomischen Kategorien als Mengengerüst zugrunde liegt und damit im Zeichen einer atomistischen Angebotskonkurrenz auf den Agrarmärkten selbst zu einem ökonomischen „Gesetz“ wird [vergl. u. a. 5, S. 195—217; 9, S. 14—22; 10, S. 21—39; 16, S. 119—122; 27, S. 14—20]. Das Vorliegen derartiger Zusammenhänge läßt sich darüber hinaus durch einen Rückschluß deduzieren: In fast keinem Lehrbuch über die Linearplanung fehlt der Hinweis, daß die an sich nichtlinearen Beziehungen durch lineare *approximiert* werden [so 6, S. 12; 8, S. 11; 13, S. VI; 19, S. 38; 27, S. 103]. Damit sind aber selbst von dieser Seite nichtlineare Verhältnisse konzidiert. Es bedarf deshalb keiner weiteren Beweise, daß Planungsmethoden, die nichtlineare Relationen berücksichtigen können, dem Untersuchungsobjekt adequat sind und eine intensive wissenschaftliche Bearbeitung rechtfertigen.

Die nachfolgende Untersuchung[1]) beginnt mit einer Darstellung der nichtlinearen Planungsmethode, soweit sie zum Verständnis für Agrarökonomen notwendig ist. Anschließend wird die Ermittlung der nichtlinearen Zielfunktionswerte und der übrigen Daten für ein praktisches Untersuchungsbeispiel dargestellt. Es schließen sich die Feststellung und Besprechung der Optimallösung an. Dieses Ergebnis wird dann mit der Linearplanung verglichen. Es folgt die Diskussion methodischer und sachlicher Probleme, die sich im Verlaufe der nichtlinearen Programmierung ergeben haben und für weitere Arbeiten auf diesem Gebiet von Interesse sind. Zum Abschluß werden Folgerungen für Wissenschaft und Praxis gezogen.

2 Die Untersuchungsmethode

Aus der historischen Entwicklung heraus läßt sich erklären, daß zunächst lineare und anschließend erst nichtlineare Verfahren erarbeitet wurden. Auch die angewandte Mathematik, die bekanntlich die Rechenmethode liefert, muß in ihrer „Genese“ mit den einfachen Methoden beginnen, um zu den komplizierten und damit rechnerisch schwierigen Verfahren fortzuschreiten. Mittlerweile wurde aber eine ganze Reihe nichtlinearer Planungsverfahren zur Lösung ökonomischer Probleme entwickelt. Sie sind weitgehend bei KÜNZI-KRELLE [13, S. 73—211] beschrieben und können deshalb hier kurz aufgezählt werden:

1. Das Verfahren von HILDRETH und D'ESOPO
2. Das Verfahren von THEIL und VAN DE PANNE
3. Das Verfahren von BEALE
4. Das Verfahren von BARANKIN und DORFMAN
5. Das Verfahren von FRANK und WOLFE
6. Die Gradientenverfahren
   a) Das Verfahren der konjugierten Gradienten von HESTENES und STIEFEL.
   b) Das Verfahren der projizierten Gradienten von ROSEN
7. Die Multiplex-Methode von FRISCH
8. Das Verfahren der zulässigen Richtungen von ZOUTENDIJK
9. Die Kapazitätsmethode von HOUTHAKKER

Die Fülle der genannten Methoden darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß sie in ihrem Anwendungsbereich zum Teil sehr beschränkt sind und keineswegs allen praktischen Anforderungen in gleicher Weise genügen. Die meisten sind an quadratische Zielfunktionen mit definiten oder semidefiniten Matrizen sowie lineare Restriktionen gebunden. Sowohl in Richtung der Zielfunktion als auch in Richtung der Restriktionen lassen sich jedoch die Methoden von ROSEN, FRISCH und ZOUTENDIJK bis zu einem gewissen Grade verallgemeinern [13, S. V.]. Damit ist für ihre Anwendung zur Ermittlung landwirtschaftlicher Betriebsorganisationen schon eine gewisse Auswahl von methodisch-theoretischer Seite getroffen.
Die nächste Einschränkung ergibt sich für die Agrarökonomik von methodisch-praktischer Seite, indem bisher nicht alle Verfahren für elektronische Rechenanlagen pro-

---

[1]) Die Optimalplanung wurde beim Deutschen Rechenzentrum (DRZ) in Darmstadt durchgeführt. Für die zuvorkommende Unterstützung ist der Verfasser dem Leiter der Abteilung Statistik, Herrn Dipl.-Math. K. H. UHLEMANN, und dem Sachbearbeiter, Herrn cand. math. L. PÖCKER, zu Dank verpflichtet.
Die Berechnung der nichtlinearen Zielfunktionswerte erfolgte mit Hilfe der Rechenanlage ZUSE Z 23 der Justus Liebig-Universität Gießen. Hierbei gewährten DR. J. HAMMERSCHICK und Dipl.-Math. F. FOCK jede erforderliche Hilfe.

grammiert wurden. Ohne elektronische Rechenanlagen sind aber heute keine Linearplanungsaufgaben mit realem Inhalt lösbar; diese Feststellung gilt in mindestens ebenso starkem Maße für nichtlineare Verfahren. Seitens des Deutschen Rechenzentrums können z. Zt. (Oktober 1965) folgende Programme für die nichtlineare Planungsrechnung zur Verfügung gestellt werden[1]):

1. Linear and Separable System
   (Verfasser: R. D. MC. KNIGHT, R. P. HARVEY und P. WOLFE)
2. Quadratische Planungsrechnung nach der Methode von BEALE
   (Verfasser: U. BARTH)
3. Quadratische Planungsrechnung nach WOLFE, lange Form
   (Verfasser: U. BARTH)
4. Gradient Projection Method for Nonlinear Programming
   (Verfasser: R. P. MERRILL und J. B. ROSEN)

Von diesen Methoden bietet die letztgenannte „Methode der projizierten Gradienten" zweifelsohne die größten Möglichkeiten, da sie nicht auf quadratische Funktionen begrenzt ist.
Bei der Ermittlung der Optimallösung bewegen sich alle Gradientenverfahren[2]) in Richtung des steilsten Anstieges der Zielfunktion unter Berücksichtigung der Restriktionen, die linear sein müssen. Die Restriktionen bilden also auch bei dieser Methode den von der Linearplanung her bekannten Lösungspolyeder. Da die direkte Grandientenmethode nicht unbedingt Lösungen zu haben braucht [13, S. 149], eignet sie sich nicht zur praktischen Anwendung. Ihre Darstellung in der Literatur hat mehr den Charakter einer prinzipiellen Erklärung des methodischen Vorgehens. Einen gangbaren Weg zeigt dagegen die LAGRANGEsche Gradientenmethode. Unter Verwendung LAGRANGEscher Multiplikatoren [s. 1, S. 381 und 395] wird der unstetige Ausdruck der direkten Gradientenmethode ersetzt und in einen stetigen umgewandelt. Das Verfahren der konjugierten Gradienten von HESTENES und STIEFEL verläuft auf iterativer Basis, ohne allerdings mit Sicherheit eine Lösung zu ergeben [13, S. 147/8]. Für die Lösung eines konvexen Programmes mit linearen Restriktionen werden in der Praxis hauptsächlich Gradientenverfahren mit endlicher Schrittweise verwendet. Hierzu zählen [13, S. 152 – 198]:

1. Das Verfahren der projizierten Gradienten von ROSEN
2. Die Multiplex-Methode von FRISCH und
3. Das Verfahren der zulässigen Richtungen von ZOUTENDIJK.

Bei diesen Verfahren nähert man sich dem Optimum auf einer stückweisen linearen Kurve. Dabei werden die Punkte, in denen eine Richtungsänderung eintritt, iterativ bestimmt. Von einem Iterationspunkt ausgehend bewegt man sich in Richtung des Gradienten, bis das Maximum erreicht ist. Sollten die Restriktionen ein Weitergehen

---

[1]) In diesem Zusammenhang kann es nicht als Aufgabe der Agrarökonomen angesehen werden, in größerem Umfang Rechenmethoden für elektronische Anlagen zu programmieren. Hierzu ist eine Zusammenarbeit zwischen Mathematikern, Programmierern und Agrarökonomen erforderlich. Der Betriebswirtschaftslehre des Landbaues geht es in erster Linie um die Anwendung mathematischer Planungsverfahren auf praktische Fragestellungen in ihrem Erkenntnisbereich. Außerdem muß die Zusammenarbeit mehrerer wissenschaftlicher Disziplinen heute als Symptom der Forschung schlechthin angesehen werden.

[2]) Ein Gradient ist ein Vektor; der Gradientenwert von $F(x)$ in x^0 steht senkrecht auf der Fläche $F(x) = F(x^0)$ und weist in Richtung des steilsten Anstieges von F in der Umgebung von x^0. Im Minimum weist der Gradient nach außen und hat somit die Größe 0. Die Gradientenmethode iteriert deshalb so lange, bis der Gradient 0 wird [vergl. 13, S. 57, 145 ff.].

auf dem Gradienten nicht zulassen, dann wird auf einem Vektor, der mit dem Gradienten einen spitzen Winkel bildet, fortgeschritten. Im ganzen Verlauf des Verfahrens wird also der durch die Restriktionen gegebene Bereich nicht verlassen.

Das Verfahren von ROSEN [20; 13, S. 152–170], das in der folgenden Untersuchung benutzt wird, ist dadurch charakterisiert, daß der Gradient auf den Rand des zulässigen Bereichs projiziert wird. Statt in Richtung des Gradienten bewegt man sich dann in Richtung des projizierten Gradienten. Auf diese Weise bleibt man zunächst noch auf dem Rand des zulässigen Bereichs. Falls nämlich im Verlaufe der Rechnung ein Randpunkt erreicht ist, weist der Gradient selbst nach außen und damit aus dem zulässigen Bereich hinaus. Sollte der erreichte Punkt auf einer Seitenfläche aber nicht auf einer Kante liegen, wird auf die Seitenfläche projiziert; falls er aber auf einer Kante liegt, wird auf die Kante projiziert. Wenn sich der Punkt im Inneren des zulässigen Bereichs befindet, dann fällt das Verfahren von ROSEN mit der gewöhnlichen Gradientenmethode zusammen.

Zur Quantifizierung und rechentechnischen Vorbereitung des Problems sind folgende sachliche Angaben notwendig:

1. die Produktionsprozesse $x_i, i = 1, 2 \dots n$
2. die linearen Restriktionen $b_j, j = 1, 2 \dots m$
   Sie können aus Gleichungen und/oder Ungleichungen bestehen und bilden im allgemeinen einen begrenzten Lösungspolyeder;
3. die Input-Output-Koeffizienten a_{ij}
4. die zu maximierende (minimierende) nichtlineare Zielfunktion $F(x)$ und ihr Gradient $g(x)$;
5. die Ausgangslösung x_0; sie braucht nicht unbedingt zulässig zu sein, da das Programm zunächst eine zulässige Lösung sucht. Im Interesse einer möglichst kurzen Rechenzeit ist allerdings die Vorgabe einer zulässigen Lösung zweckmäßig.

Das Programm ist auf $n < 108$ und $m < 270$ Variablen begrenzt.

Die zur Untersuchung anstehende Maximumaufgabe läßt sich in der von der Linearplanung her bekannten Weise schreiben:

Maximiere die Zielfunktion

$$F = \sum_{i=1}^{n} (c_i x_i + d_i x_i^2 + e_i x_i^3) \tag{1}$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i \leq b_j \tag{2}$$

und

$$x_i \geqq 0 \text{ (Nichtnegativitätsbedingung)} \tag{3}$$

Weitere methodische Fragen sowie alle mit der Programmierung für die IBM-Rechenanlage 7090 zusammenhängenden technischen Details gehen aus der Programmanleitung [17] hervor.

3 Das praktische Beispiel

3.1 *Datenermittlung und Ausgangslösung*

Ausgehend von der Linearplanung[1]) können in sämtlichen Bereichen des ökonometrischen Modells nichtlineare Zusammenhänge auftreten. Sowohl die Zielfunktion als

[1]) Sie wird als bekannt unterstellt; aus der mittlerweile umfangreichen Literatur seien genannt: [6; 8; 11; 19; 26; 27; 28]

auch die Restriktionen mit ihren Input-Output-Koeffizienten sind in praxi diesen Beziehungen unterworfen. Das nachstehende Beispiel umfaßt allerdings nur die Nichtlinearität der Zielfunktionswerte. Die Restriktionen sind nach wie vor linear. Damit ist die Gesamtheit der nichtlinearen Beziehungen nur zum Teil erfaßt. Die hier anstehende Aufgabe und die entsprechenden Ausführungen beschränken sich also auf die Programmierung mit nichtlinearer Zielfunktion.

Herkömmlicherweise ist der Deckungsbeitrag je Einheit das Kriterium der Zielfunktion. Er errechnet sich als Differenz aus Rohertrag und variablen Einzelkosten.

Der Rohertrag je Einheit wird gemeinhin als unabhängig vom Produktionsumfang angenommen. In diesem Vorgehen liegt aber schon eine gewisse Vergröberung, die bei der Anwendung feinster ökonometrischer Methoden nicht immer zulässig ist[1]). Unabhängig von diesem berechtigten Einwand wird diese Unterstellung für das folgende Beispiel beibehalten, da die größere Einflußwirkung auf die Nichtlinearität von der Kostenseite ausgeht.

Gemeinhin werden bei der Ermittlung des Deckungsbeitrages je Einheit die variablen Einzelkosten[2]) vom Rohertrag subtrahiert. Hierbei stellen die Einzelkosten im Gegensatz zu den Gemein- oder Stellengemeinkosten die Kosten dar, die von einem Kostenträger bedingt sind und deshalb verursachungsgerecht zugerechnet werden können. Variable Kosten sind die Kosten, die sich im Gegensatz zu den Fixkosten bei Änderung der Produktionsmenge ebenfalls ändern. Indessen ist die Eigenschaft fix oder variabel für eine Kostenart nicht ein für allemal determiniert; sie hängt z. B. sehr vom Betrachtungszeitraum ab [vgl. insbes. 24, S. 60]. Außerdem ist diese Einteilung streng genommen nur für eine Ist-Rechnung von Bedeutung. In der Planungsrechnung ist darüber hinaus zu entscheiden, ob das kostenverursachende Vermögensteil schon vorhanden ist oder noch gekauft werden muß. Fixkosten entstehen nämlich erst dann, wenn es bereits vorhanden ist. Da die Gliederung in fixe und variable Kosten nicht immer sachgerecht ist, wurden vor allem in der allgemeinen Betriebswirtschaftslehre gerade für die mathematischen Planungsverfahren bzw. die Deckungsbeitragsrechnung andere Kostengliederungen vorgenommen [vgl. z. B. 21, S. 87-108].

Selbst bei den variablen Einzelkosten ist die Sachlage nicht immer eindeutig. Eine vollkommene Unabhängigkeit vom Produktionsumfang ist nämlich nur dann gegeben, wenn die Kosten linear-proportional zur Produktionsmenge ansteigen oder abfallen. Neben Kostenarten, die diese Bedingung erfüllen (z. B. Saatgut-, Düngemittel-, Futtermittelkosten), gibt es aber noch weitere variable Einzelkosten, die mit zunehmendem Umfang[3]) über- oder unterproportional verlaufen [s. 16, S. 76] (z. B. Kosten der Arbeitserledigung und des Maschineneinsatzes, Reparaturkosten). Ihre exakte Zurechnung kann also nur unter Berücksichtigung des Produktionsumfanges erfolgen. Damit gelangt aber schon von dieser Seite her eine gewisse Nichtlinearität in die Deckungsbeitragsrechnung.

---

1) Grundsätzlich sollte zwischen Sache (Datenmaterial) und Methode eine Kongruenz in dem Sinne bestehen, daß die Genauigkeit des Datenmaterials weder eine (scheinbare) Verschlechterung noch Verbesserung erfährt. Zuweilen erhalten die relativ ungenauen und unsicheren Daten durch die verwendete Methode den Anschein einer Genauigkeit, die in Wirklichkeit gar nicht vorhanden ist; d. h. die Streuung einer Datenreihe ist vielfach größer als die Differenz der Durchschnittswerte verschiedener Datenreihen.

2) In der agrarökonomischen Terminologie vielfach auch Spezialkosten genannt.

3) Auf eine Berücksichtigung der Kostenremanenz bei rückläufiger Produktionsmenge soll hier verzichtet werden, obschon auch dieses Problem für die Betriebsanpassung in der Landwirtschaft von Bedeutung ist.

Weiterhin müssen Kostenarten, die bei der Berechnung eines existenten Betriebes als fix anzusehen sind (z. B. nutzungsunabhängige Abschreibungen), bei einer längerfristigen Planungsrechnung (z. B. Aussiedlung) zugerechnet werden, um kein falsches Ergebnis zu erhalten[1]). Im Sinne von SCHÖNFELD [21, S. 104 – 107] handelt es sich hier um „relevante Kosten", die bei der Ermittlung des Deckungsbeitrages vom Rohertrag zu subtrahieren sind. Diese Kostenarten führen ebenfalls vielfach zu einem nichtlinearen und damit mengenabhängigen Deckungsbeitrag je Einheit. Welche Kostenarten bei den verschiedenen Produktionsprozessen im einzelnen zu berücksichtigen sind, hängt von der jeweiligen Planungssituation ab und wird für das gewählte Beispiel später erläutert. Hier genügt zunächst die Feststellung, daß derartige Kosten in bestimmten Fällen zu berücksichtigen sind und zu nichtlinearen Zielfunktionswerten führen. Damit erweist sich die Behandlung nichtlinearer Programmierungsverfahren in der Betriebswirtschaftslehre des Landbaues als zulässig und erforderlich; über die Notwendigkeit ihrer Anwendung in jedem praktischen Einzelfall ist mit dieser Feststellung allerdings keine Aussage gemacht.

Das gewählte Untersuchungsbeispiel beinhaltet die langfristige Planung der Organisation eines existenten Betriebes. Für die einzelnen Prozesse müssen zunächst die Deckungsbeiträge je Einheit ermittelt werden; diese Aufgabe zerfällt in zwei Abschnitte. Vom Geldrohertrag ausgehend werden in einem ersten Schritt die mengenunabhängigen variablen Einzelkosten subtrahiert. Auf diese Weise ergibt sich ein Deckungsbeitrag mit einem sachlichen Inhalt, wie er gemeinhin in der Linerplanung Verwendung findet. Das Ergebnis dieser Rechenoperation sowie die möglichen Prozesse sind in Tab. 2, Spalten 1 und 3 aufgezeigt. Da hier keine Probleme vorliegen, die nicht schon von der Linearplanung her bekannt sind, erübrigt sich ein umfassender Kommentar.

In einem zweiten Schritt werden dann weitere Kosten, die für die unterstellte Planungssituation relevant sind, zugeteilt. Die kostenverursachenden Großmaschinen, ihre Kostenhöhe und die betroffenen Produktionsprozesse gehen aus Tab. 1 hervor.

Die Verteilung und Zurechnung der Kosten, die nur einen Produktionsprozeß betreffen (Einzelkosten), ist relativ einfach. Schwieriger wird es dagegen mit den Kosten, die mehrere Prozesse angehen (Stellengemeinkosten). Da derartige Kosten in der Mehrzahl der Fälle auftreten, dürfen sie auch bei einer Modelluntersuchung nicht außer acht gelassen werden. In diesem Beispiel handelt es sich einmal um die Kosten des Mähdreschers. Die Verteilung erfolgt zunächst in der Weise, daß

beim Sommergetreide	15 ha für Wintergetreide und Raps,
beim Wintergetreide	10 ha für Sommergetreide und Raps sowie
beim Raps	20 ha für Sommer- und Wintergetreide

vorweg unterstellt werden. Beim Gebläse wurde wegen der geringen Kostenhöhe auf eine derartige Zurechnung verzichtet. Es darf allerdings nicht verkannt werden, daß mit diesem Vorgehen eine Konzession der Theorie an die Praxis vorliegt. Um aber das vorliegende Beispiel aus Vergleichsgründen im Augenblick möglichst wenig von der bekannten Linearplanung zu entfernen, mag der vorgeschlagene Weg erst einmal

[1]) In Rahmen einer früheren Planungsrechnung wurde auch die Frage nach der zweckmäßigsten Milchviehhaltungsform mit untersucht. Während ohne Zurechnung der Gebäudekosten 24 Kurzstand-Kühe in die Optimallösung gelangten, kamen nach der Zuteilung 36 Laufstall-Kühe in das Programm. Bei der gleichen absoluten Baukostenhöhe beider Aufstallungsformen ist aber auch ohne Linearplanung ersichtlich, daß die 36 Laufstall-Kühe den erforderlichen Kapitaldienst besser leisten können als die 24 Kurzstand-Kühe. Um also kein sachlich falsches Ergebnis zu erhalten, mußten die Baukosten trotz aller kostenrechnerischen Probleme zugerechnet werden. Ähnlich berichtet auch VON URFF [25, S. 268, Fußnote].

TABELLE 1 Kostenhöhe, Kostenstelle und Kostenträger der nichtproportionalen Kosten

Großmaschine (Hilfskostenstelle)	Nichtproportionale Kosten DM/Jahr[1]	Beanspruchender Produktionsprozeß (Hauptkostenstelle, Kostenträger)
1	2	3
Mähdrescher	4 100	Sommergetreide Wintergetreide, Raps
Schwadmäher	275	Raps
Bunkerroder	1 410	Zuckerrüben
Bunkersammelroder und Schrägförderband	1 810	Kartoffeln
Schleusengebläse	550	Klee, Grünland[2]
Melkanlage	330	Milchvieh

[1]) Kosten für nutzungsunabhängige Abschreibung, Verzinsung, Instandhaltung sowie Unterbringung. Die unterstellten Abschreibungssätze bewegen sich zwischen 6 und 10% vom Neuwert. Der Zinsanspruch beträgt 6,5% vom halben Neuwert. Die Instandhaltungskosten liegen bei 1% von Neuwert.

[2]) 20% des Dauergrünlandes werden mit diesen Kosten, die durch die Heuwerbung verursacht sind, belastet.

hingenommen werden. Das Problem der Stellengemeinkostenverteilung wird an anderer Stelle noch einmal ausführlich behandelt (Abschn. 42)

Eine nichtlineare und mengenabhängige Kostenbelastung der Veredlungs-oder Viehhaltungsprozesse ist neben den Großmaschninen (Melkanlage) weitgehend durch die Gebäude gegeben. In einer Planungssituation kann aber nicht von einer bestimmten Gebäudekapazität und deren Kosten ausgegangen werden, da die Möglichkeit besteht, das Gebäudevolumen dem errechneten Bedarf anzupassen. Dennoch ist auch hier ein Degressionseffekt bei steigendem Prozeßumfang vorhanden. Er liegt vornehmlich darin begründet, daß nicht so sehr der eigentliche Stallraum sondern in erster Linie der auf die Einheit bezogene Bedarf an Nebenräumen und baulichen Anlagen geringer wird. Außerdem lassen sich in der Viehhaltung erst von einer bestimmten Größenordnung ab kostensparende Aufstallungsformen nutzen. Unter Verwendung verschiedener Kalkulationsunterlagen [Rindvieh: 12; 14; Schweine, Hühner: 4] und ausgehend von den Deckungsbeiträgen der Linearplanung werden durch Zurechnung der mengenspezifischen Gebäudekosten sowie der Melkanlage beim Milchvieh die nichtlinearen Deckungsbeiträge der Viehhaltungs-Aktivitäten ermittelt.

Die in der angegebenen Weise errechneten Deckungsbeiträge je Einheit der möglichen Produktions-Aktivitäten sind in Tab. 2 zusammengestellt. Zur Beurteilung der ermittelten Werte sind außerdem die Streuung, der Variationskoeffizient sowie der Untersuchungsbereich angegeben. Ferner sind für die lineare Vergleichsrechnung auch die von der Linearplanung her bekannten Deckungsbeiträge aufgeführt.

Um von den Deckungsbeiträgen je Einheit zum Gesamtdeckungsbeitrag zu gelangen, müssen die angegebenen Werte noch mit dem jeweiligen Produktionsumfang (x_i) multipliziert werden. Durch diese Rechenoperation erhält die Zielfunktion neben linearen und quadratischen auch kubische Glieder, die bislang nur von der Gradientenmethode verarbeitet werden.

Die weiteren Daten, die der Untersuchung zugrunde liegen (Input-Output-Koeffizienten, Restriktionen), gehen aus der in Tab. 3 verzeichneten Ausgangslösung hervor.

TABELLE 2 Lineare und nichtlineare Deckungsbeiträge der unterstellten Produktionsprozesse

Produktionsprozeß	Einheit	Linearplanung Deckungsbeitrag DM/Einheit	Gradientenmethode Deckungsbeitrag DM/Einheit	Streuung DM/Einh.	Variationskoeff. %	Untersuchungsbereich/Einheiten
1	2	3	4	5	6	7
Sommergetreide	ha	605	$336+14{,}672x-0{,}4097x^2$	1,7	0,4	1–15
Wintergetreide	ha	975	$580+27{,}385x-0{,}8089x^2$	2,9	0,4	1–15
Raps	ha	970	$540+63{,}922x-2{,}6626x^2$	33,1	3,9	1–15
Zuckerrüben	ha	1 305	$320+191{,}485x-16{,}4655x^2$	5,5	0,8	1–5
Kartoffeln	ha	1 180	$676+81{,}936x-9{,}5144x^2$	11,0	1,6	1–5
Klee[1])	ha	–435	$-561-33{,}198x+2{,}2362x^2$	17,0	3,6	1–10
Mais[1])	ha	–605	-605	–	–	1–10
Grünland[1])	ha	–300	$-355-12{,}094x+0{,}6769x^2$	2,5	0,5	1–12
Milchvieh	St	1 000	$211+46{,}358x-0{,}7407x^2$	58,8[2])	7,5	5–40
Mastvieh	St	645	$292+10{,}285x-0{,}0818x^2$	27,1[2])	5,0	10–80
Mastschweine	10 St	550	$-221+92{,}750x-4{,}3750x^2$	2,3	1,2	4–10
Hühner	100 St	630	$160+29{,}254x-0{,}8590x^2$	10,6	3,4	2–20

[1]) Der Deckungsbeitrag für Mais wurde linear gehalten, um aus methodischen Gründen innerhalb mehrerer nichtlinearer Deckungsbeiträge auch einen linearen zu haben; sachlich ist hier ein Lohnfeldhäcksler zur Silagebereitung unterstellt. Ebenfalls aus methodischen Gründen wurden mit Klee und Grünland Prozesse aufgenommen, deren Deckungsbeiträge mit steigendem Umfang geringer werden (niedrigere Kosten je Einheit).

[2]) Die relativ starke Streuung nach der Methode der kleinsten Quadratsumme (Methode der kleinsten Quadrate) betrifft weitgehend den Bereich, der später *nicht* in die Lösung gelangt, wie aus den Ergebnissen hervorgeht. Sie fällt in dieser Untersuchung also nicht ins Gewicht. Es ist aber darauf hinzuweisen, daß die Approximation durch eine Funktion im allgemeinen um so besser wird, je kleiner der zu erfassende Bereich ist. Deshalb sollte vor der Ermittlung einer Funktion sorgfältig überlegt werden, welcher Bereich (Produktionsumfang der Prozesse) überhaupt in Betracht kommen kann, um auf diese Weise schon die Vorbedingung für eine gute Approximation zu schaffen.

In den Zeilen 1 bis 7 sind die Restriktionen der Bodennutzung aufgeführt. Bei voller Ausnutzung der Ackerfläche kann die gesamte Getreidefläche maximal 75 % der Ackerfläche umfassen. Wintergetreide und Blattfrucht können beide je 50 % der Ackerfläche einnehmen. Mais ist auf 10 ha oder 1/3 der Ackerfläche begrenzt. Dauergrünland kann zwischen 10 und 12 ha variieren. Für 2 ha LN ergibt sich also die Alternative Acker oder Grünland. Zeile 8 stellt die Futterversorgung des Rindviehs sicher. Zeile 9 erlaubt maximal 40 Milchkühe oder 80 Mastbullen. Die Schweinehaltung ist in Zeile 10 auf 10 Einheiten oder 100 Stück Jahresbestand begrenzt. Zeilen 11 bis 16 geben die Ansprüche der einzelnen Prozesse und die Arbeitskapazität in den verschiedenen Zeitspannen wieder. Die Hühnerhaltung ist lediglich durch die Ansprüche an die Arbeitskapazität festgelegt.

Bei einer kritischen Würdigung aller unterstellten Daten muß unbedingt berücksichtigt werden:

TABELLE 3 Die Ausgangslösung der Planungsaufgabe

Produktionsaktivität / Verfügbarkeitsaktivität (P Vektor P)	Einheit	Sommergetr.	Wintergetr.	Raps	Zuckerrüben	Kartoffeln	Klee	Mais	Grünland	Milchvieh	Mastvieh	Mastschw.	Hühner	Kapazität B
		ha	ha	ha	ha	ha	ha	ha	ha	St	St	10 St	100 St	
		17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
1 Landw. Nutzfläche	ha	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	40
2 Ackerfläche	ha	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	30
3 Getreidefläche	ha	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22,5
4 Wintergetreidefl.	ha	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
5 Blattfruchtfläche	ha	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	15
6 Maisfläche	ha	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	10
7 Grünlandfläche	ha	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	12
8 Rindviehfutter	1000 KStE	0	0	0	−2,5	0	−3,0	−5,8	−3,0	3,0	1,4	0	0	0
9 Rindviehgebäude	St	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0	0,5	0	0	40
10 Schweinegebäude	10 St	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0	0	10
11 Arbeit I	h	12	4	4	25	23	3	6	3	12	2	6	7,3	350
12 Arbeit II	h	2	0	1	132	24	24	10	10	8	0	4,5	5	220
13 Arbeit III	h	11	11	16	0	0	19	0	3	14	0	7	8	600
14 Arbeit IV	h	0	16	20	64	59	0	20	4	16	2,5	8,5	10,2	700
15 Arbeit V	h	4	0	0	20	20	0	0	4	6	1,5	3	3,7	150
16 Arbeit VI	h	0	0	0	0	0	0	0	0	25	10	25	26,7	1000
$\frac{z}{c}$ Deckungsbeitrag	DM	siehe Tabelle 2												

TABELLE 4 Ergebnis der nichtlinearen und der linearen Planungsrechnung

Aktivität	Einheit	Nichtlineares Modell			Lineares Vergleichsmodell		
		Ansatz	Endlösung		Ansatz	Endlösung	
		Kapazität	Kapazität	Shadow Prices	Kapazität	Kapazität	Shadow Prices
1	2	3	4	5	6	7	8
Verfügbarkeitsaktivitäten							
1 Landw. Nutzfläche	ha	40	0	293	40	0	130
2 Ackerfläche	ha	30	1,55	0	30	0	184
3 Getreidefläche	ha	22,5	6,47	0	22,5	5,05	0
4 Wintergetreidefläche	ha	15	0	182	15	0	146
5 Blattfruchtfläche	ha	15	2,58	0	15	2,45	0
6 Maisfläche	ha	10	0	415	10	0	237
7 Grünlandfläche	ha	12	0,45	0	12	2,35	0
8 Rindviehfutter	1000 KSTE	n. Bedarf	0	360	n. Bedarf	0	332
9 Rindviehgebäude	St	40	6,90	0	40	8,35	0
10 Schweinegebäude	10 St	10	10	0	10	8,25	0
11 Arbeit I	h	350	41	0	350	23	0
12 Arbeit II	h	220	0	36	220	0	13
13 Arbeit III	h	600	350	0	600	324	0
14 Arbeit IV	h	700	0	24	700	0	32
15 Arbeit V	h	150	0	0	150	0	67
16 Arbeit VI	h	1000	338	0	1000	323	0
Produktionsaktivitäten							
17 Sommergetreide	ha	5	1,03	0	0	2,45	0
18 Wintergetreide	ha	10	15,00	0	0	15,00	0
19 Raps	ha	6	2,42	0	0	2,34	0
20 Zuckerrüben	ha	0	0	5327	0	0	3232

21 Kartoffen	ha	0	0	1887	0	0	2666
22 Klee	ha	0	0	608	0	0,20	0
23 Mais	ha	9	10,00	0	0	10,00	0
24 Dauergrünland	ha	10	11,55	0	0	10,00	0
25 Milchvieh	St	0	0	1569	0	0	1011
26 Mastvieh	St	58	66,18	0	0	63,29	0
27 Mastschweine	10 St	0	0	585	0	1,75	0
18 Hühner	100 St	0	0	263	0	0	8
errechn. Deckungsbeitrag	DM	–	44082	–	–	50557	–
nichtproport. Kosten	DM	–	912	–	–	9127	–
vergleichbarer Deckungsbeitrag	DM	–	43170	–	–	41430	–

1. Grundsätzlich ist jede Planungsaufgabe situationsbedingt; Verallgemeinerungen sind nur in engen Grenzen zulässig.
2. Es geht in dieser Untersuchung primär um methodische Fragen; das sachliche Ergebnis ist nur Mittel zum Zweck.

3.2 *Die Ergebnisse der nichtlinearen Planungsrechnung und der linearen Vergleichsrechnung*

Das numerische Ergebnis der nichtlinearen Planungsrechnung mittels der „Methode der projizierten Gradienten“ von Rosen ist in den Spalten 3 bis 5 der Tabelle 4 zusammengestellt. Aus Vergleichsgründen ist das Resultat der Linearplanung nach der Standard-Simplex-Methode in den Spalten 6 bis 8 ebenfalls aufgeführt.

Die Gradientenmethode nimmt von 12 angebotenen Produktionsprozessen 6 in die Optimallösung. Dabei sind aber lediglich die Aktivitäten Wintergetreide (P 18) und Mais (P 23) voll ausgeschöpft. Alle übrigen Prozesse der Optimallösung (P 17, P 19, P 24, P 26) sind durch die Interdependenz der Verfügbarkeits- und Produktions-Aktivitäten determiniert. Überhaupt nicht ausgenutzt ist lediglich das Schweinegebäude (P 10). In den Zeitspannen I (P 11), III (P 13) und VI (P 16) ist noch Arbeit übrig. Ebenfalls nicht *voll* beansprucht wurden die Ackerfläche (P 2), die Getreidefläche (P 3), die Blattfruchtfläche (P 5) sowie die Grünlandfläche (P 7). Da aber die gesamte landwirtschaftliche Nutzfläche (P 1) erschöpft ist, handelt es sich bei den BodennutzungsAktivitäten lediglich um eine spezielle Verteilung der Gesamtfläche im Rahmen der zugelassenen Bedingungen, wobei die erlaubten Höchstkapazitäten nur zum Teil ausgenutzt sind.

Der errechnete Gesamtdeckungsbeitrag beträgt 44 082 DM. In einer Kontrollrechnung ergab sich aber, daß von den nichtproportionalen Mähdrescherkosten

in Höhe von insgesamt 4100 DM (Tab. 1) 912 DM in der Optimallösung nicht erfaßt sind und deshalb nachträglich noch abzusetzen sind. Die angenommenen Unterstellungen über die Stellengemeinkosten des Mähdreschers (Abschnitt 31) sind also im Optimum nicht ganz eingetreten. Wie schon angedeutet wurde, ist demnach dieses Problem noch nicht exakt gelöst[1]). Über die Möglichkeit einer Deckungsbeitragserhöhung durch Erweiterung der voll ausgenutzten Verfügbarkeits-Aktivitäten sowie den Deckungsbeitragsentgang bei Einbeziehung der Produktions-Aktivitäten in die Lösung, die nicht im Optimalprogramm enthalten sind, gibt Spalte 5 der Tab. 4 Auskunft.
Das Ergebnis der *linearen Vergleichsrechnung* umfaßt 8 von 12 Produktions-Aktivitäten. Voll ausgenutzt sind von insgesamt 16 Verfügbarkeits-Aktivitäten immerhin 9. Der Deckungsbeitrag ist mit 50 557 DM errechnet. Um ihn aber dem Deckungsbeitrag der Gradientenmethode im sachlichen Inhalt vergleichbar zu machen, müssen noch die bisher unberücksichtigten nichtproportionalen Kosten, die ja bekanntlich bei der Gradientenmethode zur Nichtlinearität der Zielfunktion führen, subtrahiert werden. Sie machen für das ermittelte Produktionsprogramm 9 127 DM aus, so daß ein vergleichbarer Deckungsbeitrag von 41 430 DM verbleibt. Da es sich um eine *Planungsrechnung* handelt, sind sinngemäß nur die nichtproportionalen Kosten der in das Programm gelangenden Aktivitäten erfaßt; z. B. bleiben die Kosten für die Bunkerroder der Zuckerrüben bzw. Kartoffeln selbstverständlich außer Ansatz. In der Planungssituation ist ja unterstellt, daß die angebotenen Maschinen (Tab. 1) eingesetzt werden können, wenn es ökonomisch zweckmäßig ist. Über ihre effektive Anschaffung soll aber erst mit Hilfe der Planungsrechnung entschieden werden.
Ein unmittelbarer Vergleich beider Planungsverfahren zeigt, daß der *Deckungsbeitrag* nach der Gradientenmethode um 1 740 DM oder rund 4,2% höher ist als der nach der Standard-Simplex-Methode der Linearplanung. Die Ursache dieses Unterschiedes ist darin zu sehen, daß mit Hilfe einer nichtlinearen Zielfunktion die Kostendegression bzw. die Deckungsbeitragsprogression bei steigender Menge im Gegensatz zur Linearplanung erfaßt werden kann. Die Differenz im Deckungsbeitrag beider Planungsmethoden hängt im Einzelfall naturgemäß von der Stärke der Degression resp. Progression d. h. von der Krümmung der Deckungsbeitragsfunktion sowie von der Stabilität der Deckungsbeiträge der Linearplanung ab.
Da das reale Geschehen sehr unterschiedliche Situationen bietet, läßt sich eine generelle Aussage über die Höhe der Einflußwirkung einer nichtlinearen Zielfunktion auf den Gesamtdeckungsbeitrag im Vergleich zu einer linearen Zielfunktion nicht machen. Diese Einschränkung beinhaltet indessen kein Urteil über die benutzte Planungsmethode; sie ist vielmehr durch die Variationsvielfalt der praktischen Erscheinungsformen bedingt. Grundsätzlich ist die Gradientenmethode aber in der Lage, bestehende Differenzen zu erfassen und Anpassungen vorzunehmen.
Hinsichtlich des *Produktionsprogrammes* ist bei der Gradientenmethode eine Vereinfachung der Betriebsorganisation festzustellen, wenn wiederum das Linearplanungsergebnis zum Vergleich herangezogen wird. Sie ergibt sich daraus, daß Prozesse mit geringem Umfang infolge der Deckungsbeitragsprogression bei zunehmender Menge eliminiert werden. Gegenüber der Linearplanung sind aus der Endlösung der Gradientenmethode die Prozesse Klee (P 22) und Schweine (P 27) verschwunden. Die Gradientenmethode ist also prinzipiell geeignet, derartige „Rest“-Aktivitäten zu beseitigen;

---

[1]) Es wäre natürlich möglich, diese nicht exakt erfaßten Stellengemeinkosten durch Korrekturen der Ausgangslösung zum Verschwinden zu bringen und ein in dieser Hinsicht einwandfreies Rechenergebnis vorzulegen. Da es hier jedoch um eine objektive Darstellung der Gradientenmethode geht, werden die Probleme so geschildert, wie sie bei einer praktischen Handhabung auftreten.

wogegen diese „Korrektur“ bei der Linearplanung immer nachträglich erfolgen muß. Die Gradientenmethode wirkt also in Richtung größerer Produktionsmengen. Bezüglich der Betriebsorganisation führt sie somit zur Betriebsvereinfachung und Spezialisierung. Auf diese Weise ist sie den augenblicklich anstehenden organisatorischen Problemen landwirtschaftlicher Betriebe adaequat.
Im Hinblick auf eine sparsame *Mittelverwendung* ist das Ergebnis der nichtlinearen Programmierung ebenfalls besser als das der Linearplanung. Wie aus Tabelle 4, Spalten 4 und 7 der Zeilen 11 bis 16, hervorgeht, wird der höhere Deckungsbeitrag der Gradientenmethode mit einem geringeren Arbeitseinsatz als der niedrigere Deckungsbeitrag der Linearplanung erzielt. Wenn auch die überschüssige Arbeitskapazität im Rahmen der herrschenden Theorie den Grenzwert 0 hat, so kommt ein derartiges Ergebnis den Zielen eines Familienbetriebes, der hier unterstellt ist, entgegen. Selbst wenn die eingesparte Arbeit keine höhere Utilität (objektiver Nutzen) schafft, so handelt es sich doch zumindest um eine größere Ophelimität (subjektiver Nutzen) im Sinne von PARETO.

4 Besonderheiten der nichtlinearen Programmierung

4.1 *Methodische Probleme*

Der Ablauf der Programmierung mit der „Methode der projizierten Gradienten“ brachte einige Probleme mit sich, die noch einer Diskussion bedürfen, denn das angewandte Verfahren weist nicht den strengen Algorithmus der Standard-Simplex-Methode der Linearplanung auf. Neben rechentechnischen Werten, die aus dem Aufbau der Matrix hervorgehen (z. B. Anzahl der Produktionsprozesse, der Verfügbarkeits-Aktivitäten, der bounds[1]) und der Gleichungen), sind noch mehrere Parameter anzugeben, die für den Rechengang und dessen Ergebnis von Bedeutung sind:

1. MXNU — Höchstzahl der Schritte
2. MXRN — Höchstzahl der Re-Inversionen
3. β max —) Begrenzung für die Anzahl der
4. γ max —) Gradienteninterpolationen
5. η max — Höchstzahl der X, G Extrapolationen
6. ε_1 — Toleranz der Gradienten
7. ε_2 — Toleranz der Bedingungen
8. ε_3 — Toleranz der linearen Abhängigkeit
9. τ max — Maximale Schrittlänge

Die Parameter 1 bis 5 erlauben es, den Rechenaufwand gegebenenfalls zu begrenzen. Sofern keine besonderen Angaben gemacht werden, sind im Programm Höchstwerte vorgegeben. Da es sich hier um eine Modelluntersuchung handelt, konnten die Höchstwerte a priori nicht eingeengt werden.
Im Gegensatz zu den fünf erstgenannten Parametern müssen jedoch für die Daten 6 bis 9 in jedem Fall Angaben gemacht werden. Wenn auch die Rechenanleitung Hinweise für die zweckmäßige Wahl dieser Parameter gibt, so muß doch geprüft werden, ob die getroffenen Entscheidungen dem vorliegenden Einzelfall gerecht werden.
Die Bedeutung der Gradiententoleranz (ε_1) für das Planungsergebnis ist in Tab. 5 ver-

[1]) Bounds sind Restriktionen, die nur einen Produktionsprozeß betreffen (z. B. Begrenzung der Wintergetreidefläche); die Gesamtheit der Begrenzungen wird dagegen mit constraints bezeichnet.

TABELLE 5 Der Einfluß der Gradiententoleranz (Parameter ε_1) auf das Planungsergebnis

Parameter Aktivität	Ein-heit	$\varepsilon_1 =$ 0,0005	$\varepsilon_1 =$ 0,001	$\varepsilon_1 =$ 0,01	$\varepsilon_1 =$ 0,1	$\varepsilon_1 =$ 0,5
1	2	3	4	5	6	7
Verfügbarkeitsaktivität						
1 Landw. Nutzfläche	ha	–	–	–	–	–
2 Ackerfläche	ha	–	–	1,09	1,55	1,55
3 Getreidefläche	ha	7,50	7,50	8,59	6,47	6,47
4 Wintergetreidefläche	ha	2,96	2,96	3,00	–	–
5 Blattfruchtfläche	ha	–	–	–	2,58	2,58
6 Maisfläche	ha	–	–	–	–	–
7 Grünlandfläche	ha	2,00	2,00	0,91	0,45	0,45
8 Rindviehfutter	1000 KStE	–	–	–	–	–
9 Rindviehgebäude	St	8,54	8,54	7,40	6,90	6,90
10 Schweinegebäude	10 St	10,00	10,0	10,00	10,00	10,00
11 Arbeit I	h	24	24	22	41	41
12 Arbeit II	h	–	–	–	–	–
13 Arbeit III	h	319	319	333	350	350
14 Arbeit IV	h	–	–	–	–	–
15 Arbeit V	h	–	–	–	–	–
16 Arbeit VI	h	349	349	346	338	338
Produktionsaktivität						
17 Sommergetreide	ha	2,96	2,96	1,91	1,03	1,03
18 Wintergetreide	ha	12,04	12,04	12,00	15,00	15,00
19 Raps	ha	5,00	5,00	5,00	2,42	2,42
20 Zuckerrüben	ha	–	–	–	–	–
21 Kartoffeln	ha	–	–	–	–	–
22 Klee	ha	–	–	–	–	–
23 Mais	ha	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
24 Grünland	ha	10,00	10,00	11,09	11,55	11,55
25 Milchvieh	St	–	–	–	–	–
26 Mastvieh	St	62,94	62,94	65,18	66,18	66,18
27 Mastschweine	10 St	–	–	–	–	–
28 Hühner	100 St	0,82	0,82	–	–	–
Deckungsbeitrag	DM	43 345	43 345	43 721	44 082	44 082
Iterationsschritte	St	8	8	8	13	13
Rechendauer je job	Min	0,92	0,92	1,52	0,90	0,89

zeichnet. Im Untersuchungsbereich variiert der Parameterwert in 5 Stufen von 0,0005 bis 0,5; d. h. in einer Größenordnung von 1:1000.
Zunächst ist festzustellen, daß die Rechnung mit den beiden Extremwerten (0,0005

und 0,001 bzw. 0,1 und 0,5) die gleichen numerischen Ergebnisse liefert, so daß für das Untersuchungsbeispiel lediglich der Parameterbereich $\varepsilon_1 = 0{,}001$ bis 0,1 von Interesse ist. Die entsprechenden Resultate in den Spalten 4 bis 7 der Tab. 5 zeigen einen von den niedrigen zu den hohen Parameterwerten steigenden Deckungsbeitrag. Zwar ist der Unterschied nicht sonderlich groß, doch muß der Wert 0,1 als der im Sinne des Planungszieles optimale angesehen werden. Die verschiedenen Organisationsprogramme lassen den gleichen Schluß zu. Weiterhin ist zu beachten, daß die Ergebnisse in den Spalten 7 und 8 der Übersicht im Gegensatz zu den anderen Resultaten nicht die Bemerkung „Projekt not Zero at Vertex" tragen, die darauf hindeutet, daß das Maximum noch nicht erreicht ist [17, S. 23]. Diese Feststellungen stehen in einem gewissen Widerspruch zur Programmanleitung, in der es heißt [17, S. 14]: „In general, the smaler the value of ε_1, the better the maximum will be." Außerdem ist festzustellen, daß sich das Ergebnis der Gradientenmethode mit steigendem Parameter ε_1 immer weiter vom Linearplanungsergebnis entfernt (vgl. Tab. 5 und 4, Sp. 7).

Die *Toleranz der Bedingungen* (ε_2) erfaßt kein spezifisches Problem der *nichtlinearen* Programmierung, da sie die *linearen* Restriktionen betrifft. Laut Programmanleitung [17, S. 14] ist ein Wert von $\varepsilon_2 = 0{,}001$ zweckmäßig. Ein größerer Wert ist nur dann angebracht, wenn die Variablen schlecht skaliert sind. In der vorliegenden Untersuchung ergab eine Variation von ε_2 ($\varepsilon_2 = 0{,}01$) keine Änderung des Ergebnisses.

Wie in einer früheren Rechnung festgestellt werden konnte, ist es nicht zweckmäßig, die *Toleranz der linearen Abhängigkeit* (ε_3) zu variieren. Lediglich für Ausnahmefälle empfiehlt die Programmanleitung eine Erhöhung dieses Wertes von 0,05 auf 0,06, wobei aber gleichzeitig vor einer allzu schnellen Anwendung dieser Möglichkeit gewarnt wird [17, S. 14/15].

Der Einfluß der *maximalen Schrittweite* (τ max) wurde in vier Variationen untersucht; τ max nahm dabei die Werte 100, 250, 500 und 750 an, Laut Programmanleitung ist ein Wert von 250 oder 500 zweckmäßig. Neben diesen Werten wurde aber noch jeweils ein höherer und ein niedrigerer Wert in die Untersuchung aufgenommen. Sowohl für $\varepsilon_1 = 0{,}1$ als auch für $\varepsilon_1 = 0{,}001$ ergaben sich durch die Änderung der maximalen Schrittweite *keine* Änderungen in den Optimalprogrammen. Die numerischen Ergebnisse für alle unterstellten τ max-Werte entsprechen den in Tabelle 5, Spalten 4 bzw. 6 aufgezeigten Resultaten. Die maximalen Schrittweiten 250 und 500 können somit als situationsgerecht bezeichnet werden, wobei jedoch Über- oder Unterschreitungen zulässig sind.

Es ist noch anzumerken, daß sich der Zeitaufwand für die Herrichtung der Lochkarten und die eigentliche Rechnung mit dem Elektronenrechner kaum von dem für die Linearplanung unterscheidet. Lediglich die Ermittlung der Deckungsbeiträge dauert bei der Gradientenmethode länger. Der durchschnittliche Rechenzeitbedarf einer Aufgabe liegt unter einer Minute und ist weitgehend unabhängig von der Anzahl der Iterationen (vgl. Tab. 5).

4.2 *Sachliche Probleme*

Aus Tab. 4, Spalte 3 geht ein sachliches Problem der nichtlinearen Planungsrechnung unmittelbar hervor. Die Rechnung beginnt nämlich nicht mit der sogenannten O-Lösung, wie sie in der Linearplanung üblich ist, sondern mit einem Ansatz, der bereits nahe am Optimum liegt. Es ist deshalb zu untersuchen, welchen Einfluß die gewählte Ausgangslösung auf das Ergebnis hat. Zu diesem Zweck sind folgende Fälle, die bei der praktischen Anwendung rekonstruierbar sind, angenommen:

I: Ausgangslösung nahe der Optimallösung;
II: Alle Werte der Ausgangslösung null;

III: Alle Werte der Ausgangslösung eins;
IV: Alle Werte der Prozesse, die in der Endlösung auftreten, eins; alle übrigen Werte null;
V: Alle Werte der Prozesse, die in der Endlösung auftreten, null; alle übrigen Werte eins.

Mit dieser Auswahl sind für die systematische Untersuchung Fälle erfaßt, die im Sinne der Optimallösung sowohl richtig (I und IV) als auch indifferent (II und III) oder gar falsch (V) sind. Das Ergebnis dieser Analyse ist in Tab. 6 aufgeführt.

TABELLE 6 Der Einfluß der Ausgangslösung auf das Planungsergebnis ($\varepsilon_1 = 0{,}1$; τ max = 250)

Beispiel Aktivität	Einheit	I	II	III	IV	V
1	2	3	4	5	6	7
Produktionsaktivitäten der Ausgangslösung						
1 Sommergetreide	ha	5	0	1	1	0
2 Wintergetreide	ha	10	0	1	1	0
3 Raps	ha	6	0	1	1	0
4 Zuckerrüben	ha	0	0	1	0	1
5 Kartoffeln	ha	0	0	1	0	1
6 Klee	ha	0	0	1	0	1
7 Mais	ha	9	0	1	1	0
8 Grünland	ha	10	0	1	1	0
9 Milchvieh	St	0	0	1	0	1
10 Mastvieh	St	58	0	1	1	0
11 Mastschweine	10 St	0	0	1	0	1
12 Hühner	100 St	0	0	1	0	1
Produktionsaktivitäten der Endlösung						
1 Sommergetreide	ha	1,03	1,17	1,14	1,92	5,46
2 Wintergetreide	ha	15,00	15,00	15,00	12,00	12,79
3 Raps	ha	2,42	2,38	2,38	5,00	11,75
4 Zuckerrüben	ha	–	–	–	–	–
5 Kartoffeln	ha	–	–	–	–	–
6 Klee	ha	–	–	–	–	–
7 Mais	ha	10,00	10,00	10,00	10,00	–
8 Grünland	ha	11,55	11,45	11,48	11,08	–
9 Milchvieh	St	–	–	–	–	–
10 Mastvieh	St	66,18	65,96	66,03	65,17	–
11 Mastschweine	10 St	–	–	–	–	–
12 Hühner	100 St	–	0,16	0,13	–	25,52
Deckungsbeitrag	DM	44 082	44 041	44 053	43 719	32 008
Iterationsschritte	St	13	19	23	17	13
Rechendauer je job	Min	0,89	0,98	1,00	0,97	0,89

Den höchsten Deckungsbeitrag liefert der Ansatz I, bei dem die Ausgangslösung schon nahe am Optimum liegt. Nur wenig niedriger sind jedoch die Ergebnisse des II. und III. Ansatzes. Demgegenüber ist das Resultat der Aufgabe IV schon etwas und das des Ansatzes V bedeutend niedriger. Daß die Beispiele II bis IV das Optimum nicht erreicht haben, geht auch aus der Bemerkung in der Endlösung hervor: „Project not Zero at Vertex"[1]). Bei Beispiel V steht sogar: „Maximum Interp"; d. h. ein weiteres Anwachsen des Deckungsbeitrages ist nicht möglich, da die Höchstzahl der Gradienteninterpolationen (vergl. Parameter β max und γ max) durchgeführt worden ist [weitere Einzelheiten: 17, S. 23].
Hinsichtlich der errechneten Betriebsorganisationen ist ebenfalls Beispiel I als die beste Lösung anzusprechen. Im Ergebnis der Ansätze II und III wirken die geringen Hühner-Aktivitäten störend; ansonsten sind sie dem des Ansatzes I weitgehend gleichwertig. Genau die gleichen Prozesse wie Aufgabe I hat auch Ansatz IV in der Endlösung; allerdings differiert der Umfang der einzelnen Aktivitäten etwas. Wenn die Hühner-Aktivität im Ansatz nicht besonders hervorgehoben oder mit den anderen Prozessen gleichgestellt wird, gelangt sie nicht in die Endlösung. Fall V weicht in seiner Betriebsorganisation sehr stark von den übrigen Beispielen ab. Die Gradientenmethode hat hier einen völlig anderen Weg eingeschlagen, indem der Raps außergewöhnlich umfangreich und die Hühner anstelle der Bullen in die Endlösung gelangen. Dabei werden sogar 10 ha LN — das im Beispiel unterstellte natürliche Grünland — gar nicht ausgenutzt. Somit ist der geringe Deckungsbeitrag aufgrund der „Fehlorganisation" durchaus erklärlich. Die Zahl der Iterationen schwankt in den fünf Beispielen zwischen 13 (Fall I) und 23 (Fall III). Diese großen Unterschiede kommen jedoch im Zeitaufwand nicht zum Ausdruck. Hier liegen die Extremwerte bei 0,89 (Fall I) und 1,00 (Fall III) Minuten je Aufgabe. Durch die Vorgabe einer Ausgangslösung, die das Optimum fast erreicht hat (Fall I), kann der Rechenaufwand also nicht entscheidend verkürzt werden. Der Zeitbedarf je Iteration erreicht eine Größenordnung von 0,01 Minuten, wenn für die gesamte Aufgabe ein Zeitaufwand von etwa 0,75 Minuten vorweg unterstellt wird.
In einer Untersuchung konnte festgestellt werden, daß es zulässig ist, eine oder auch mehrere Restriktionen in *relativer Schreibweise* anzugeben. Damit erfüllt das Programm Ansprüche, die bei bestimmten sachlichen und methodischen Fragestellungen von Bedeutung sind.
In den bisher dargestellten Beispielen wurde das Problem der *Stellengemeinkostenverteilung* noch nicht zufriedenstellend gelöst. Da die Belastung je Prozeßeinheit mit derartigen Kosten vom Umfang der übrigen betroffenen Prozesse abhängt, ergibt sich eine Interdependenz des Betriebsgeschehens, die in den herkömmlichen Ansätzen nicht erfaßt ist. Ihre Berücksichtigung im Planungsansatz ist deshalb so schwierig, weil die einzelnen Prozesse vom Algorithmus der Methode her unabhängig nebeneinander stehen. Hinzu kommt noch eine mit steigender Menge degressive Stückkostenbelastung, die aufgrund ihrer Nichtlinearität in der Linearplanung definitionsgemäß nicht zuverlässig erfaßt werden kann. Zwar werden Möglichkeiten entwickelt, dieses Problem wenigstens näherungsweise zu lösen [z. B. 28, S. 60—73], doch ist die Anwendung auf eine bestimmte nichtlineare Funktion beschränkt, die sich aus dem *linearen* Gesamtdeckungsbeitragsverlauf über den Zusammenhang $c_i = C_i/x_i$[2]) ergibt, wobei der zum Abszissenwert x_0 gehörende Ordinatenwert $y \neq 0$ sein kann; d. h. die Gesamtdeckungsbeitragsgerade geht nicht durch den Koordinatenanfangspunkt. Nachdem

---

[1]) Im absoluten Optimum des Lösungspolyeders ist der Gradient null.
[2]) c_i — Deckungsbeitrag je Einheit; C_i — Gesamtdeckungsbeitrag des Prozesses i; x_i — Menge des Prozesses i.

jedoch im Verlaufe dieser Untersuchung verschiedene nichtlineare Gegebenheiten mit quadratischen und kubischen Funktionen der allgemeinen Form dargestellt wurden, liegt der Gedanke nahe, auf diese Weise auch die Stellengemeinkosten zu berücksichtigen. Die Vorbereitung dieser Aufgabe gliedert sich in zwei Teile:

1. Berechnung der Stellengemeinkostenfunktion;
2. Einbau dieser Funktion in das Modell.

Stellvertretend für die verschiedenen Arten der Stellengemeinkosten soll hier die exakte Verteilung der Mähdrescherkosten in Höhe von 4 100 DM (Tab. 1) auf die Prozesse Sommer-, Wintergetreide und Raps demonstriert werden. Für die Kosten je Einheit (ha Sommer-, Wintergetreide und Raps) wurde folgende Funktion im Bereich zwischen 15 und 30 ha Mähdruschfläche errechnet:

$$c_{MD} = -588 + 29x - 0{,}482x^2 \text{ (DM/ha)} \qquad (4)$$

Die Gesamtkosten des Mähdreschers ergeben sich aus der Multiplikation dieser Funktion mit der Menge x_{MD}, so daß in der Gesamtdeckungsbeitragsfunktion kubische Glieder vorkommen. Zum Zwecke des Einbaues in das Modell wird die bisherige Ausgangslösung (Tab. 3) um den Prozeß Mähdruschfläche zur Erfassung der Mähdrescherkosten erweitert (Hilfskostenstelle). Als Zielfunktionswert werden die oben ermittelten Werte eingetragen. Über eine Transfer-Aktivität werden die Mähdrescherkosten an die sie verursachenden Prozesse Sommer-, Wintergetreide und Raps gekoppelt. Vorher müssen allerdings die ursprünglichen Deckungsbeiträge dieser Aktivitäten (Tab. 2, Spalte 4) um die prophylaktisch verteilten Mähdrescherkosten (Abschnitt 31) „entlastet“ werden. Dabei ergibt sich bei Sommer- und Wintergetreide als Deckungsbeitrag der für die Linearplanung errechnete Wert (Tab. 2, Spalte 3), da die Nichtlinearität der Deckungsbeiträge dieser beiden Prozesse allein durch die jetzt gesondert erfaßten Mähdrescherkosten bewirkt wurde. Für Raps dagegen muß wegen der nichtproportionalen Schwadmäherkosten in Höhe von 275 DM ein neuer nichtlinearer Deckungsbeitrag errechnet werden:

$$c_R = 616 + 79{,}44x - 4{,}6804x^2 \text{ (DM/ha)} \qquad (5)$$

Modellmäßig wird der ursprüngliche Ansatz folgendermaßen erweitert:

TABELLE 7 Die Ausgangslösung zur Verteilung von Stellengemeinkosten (Mähdrescher)

Prozeß Restriktion	Sommer-getreide	Winter-getreide	Raps	Zucker-rüben	...	Hühner	Mäh-drescher	Kapazität
Landw. Nutzfläche	.	.	.	.	...	.	0	.
.	.		a_{ij}			.	.	b_j
.	.			.		.	.	.
Arbeit VI	.	.	.	.	...	.	0	.
MD-Transfer	1	1	1	0	...	0	−1	0
Deckungsbeitrag	.	.	. c_i	.	...	.	c_{MD}	0

Methodisch von Interesse ist noch, daß die Stellengemeinkosten des Mähdreschers sowohl auf Prozesse mit linearem als auch mit nichtlinearem Deckungsbeitrag übertragen werden. Ansonsten bleibt der ursprüngliche Ansatz erhalten (Tab. 3). Um keine Irrtümer aufkommen zu lassen, muß darauf hingewiesen werden, daß eine Erfassung

und Verteilung der Stellengemeinkosten nur dann *sachlich* zulässig ist, wenn es sich um *variable* Kosten handelt.
Die Ergebnisse der Ausgangslösung mit der Verteilung der Mähdrescherkosten über eine spezielle Kostenfunktion und der ursprünglichen Ausgangslösung mit näherungsweiser Verteilung der Mähdrescherkosten (vgl. Tab. 3 und 4) sind in der folgenden Übersicht zum Vergleich zusammengestellt.

TABELLE 8 Ergebnisse der nichtlinearen Programmierung mit näherungsweise bzw. mittels Kostenfunktion verteilter Stellengemeinkosten (Mähdrescherkosten)

Produktions-Aktivität	Einheit	Näherungsweise verteilte Mähdrescherkosten[1])	Mittels Kostenfunktion verteilte Mähdrescherkosten[2])
1	2	3	4
Sommergetreide	ha	1,03	1,03
Wintergetreide	ha	15,00	15,00
Raps	ha	2,42	2,42
Mais	ha	10,00	10,00
Grünland	ha	11,55	11,55
Mastvieh	St	66,18	66,18
Mähdruschfläche	ha	–	18,45
Errechneter Deckungsbeitrag	DM	44 082	43 172
Nicht verteilte Mähdrescherkosten	DM	912	–
Deckungsbeitrag ohne Mähdrescherkosten	DM	43 170	43 172

[1]) siehe Abschnitt 31; [2]) errechnete Funktion: $c_{MD} = -558 + 29{,}000x - 0{,}482x^2$ (DM/ha)

In der Betriebsorganisation liefern beide Ansätze das gleiche Ergebnis. Aufgrund der Ausweitung des zweiten Ansatzes um den Prozeß Mähdrusch gibt die Lösung noch zusätzlich diese Fläche an; sie muß mit der Summe aus Sommergetreide-, Wintergetreide- und Rapsfläche übereinstimmen. Nach einer Korrektur des errechneten Deckungsbeitrages des ersten Ansatzes um die noch nicht erfaßten Mähdrescherkosten, die in einer nachträglichen Rechnung mit Hilfe der Ausgangsdaten erfolgen muß, sind auch die ermittelten Deckungsbeiträge gleichwertig. Während jedoch im ersten Fall eine zusätzliche Berechnung erforderlich ist, liefert der zweite Ansatz gleich das richtige Ergebnis. Daß mittels Hilfskostenstelle Mähdrusch und Transfer-Aktivität genau die Mähdrescherkosten in Höhe von 4100 DM erfaßt wurden, geht auch aus einer Kontrollrechnung hervor, in der die Verteilung zunächst nicht gefordert wurde. Bei gleicher Betriebsorganisation[1]) lag nämlich der Gesamtdeckungsbeitrag genau um die Mäh-

[1]) Die Übereinstimmung im sachlichen Ergebnis ist zufällig; sie deutet darauf hin, daß der Getreide- und Rapsbau trotz der Belastung durch die Mähdrescherkosten in ihrer Konkurrenzfähigkeit gegenüber den anderen Prozessen kaum etwas eingebüßt haben. Zur Demonstration der Methode ist dieses Ergebnis aber besonders geeignet.

drescherkosten höher als bei einer Einbeziehung dieser Kosten in der angeführten Weise. Damit ist gezeigt, daß die in dieser Untersuchung angewandte Gradientenmethode von ROSEN bei entsprechender Herrichtung des Ansatzes grundsätzlich in der Lage ist, das Problem der Stellengemeinkostenverteilung im Rahmen einer simultanen Datenverarbeitung rechnerisch einwandfrei zu lösen[1]). Die Gradientenmethode führt also zu einer echten Erweiterung des methodischen Rüstzeuges der Betriebswirtschaftslehre des Landbaues.

5 Folgerungen für Wissenschaft und Praxis

Die vorliegende Studie behandelt die Planungsrechnung mit nichtlinearer Zielfunktion. Grundsätzlich ist die angewandte „Methode der projizierten Gradienten" in der Lage, die Nichtlinearität der Zielfunktion zu erfassen und auf dieser Basis eine Optimalorganisation landwirtschaftlicher Betriebe im Rahmen einer simultanen Verarbeitung aller Einflußdaten zu liefern. Außerdem kann mit dieser Methode eine zuverlässige Verteilung der Stellengemeinkosten vorgenommen werden. Damit geht die benutzte Methode in zwei entscheidenden Punkten über die Möglichkeiten der Linearplanung hinaus.

Trotz dieser dargelegten Vorteile gegenüber der Linearplanung harren aber noch weitere Probleme einer Lösung auf *wissenschaftlicher Ebene*. Die vorgeführte Methode erfaßt nämlich nur einen Teil der in der Realität des landwirtschaftlichen Produktionsprozesses vorkommenden nichtlinearen Beziehungen; so bleibt der gesamte Komplex der nichtlinearen Restriktionen ausgeklammert. Auf die Einbeziehung derartiger Relationen in das Modell der mathematische Planungsrechnung müssen sich die weiteren Anstrengungen konzentrieren. Erst wenn diese Aufgabe gelöst ist, kann von einem der Wirklichkeit angepaßten Modell gesprochen werden. Außerdem müssen die hier in Form einer Einzelstudie vorgetragenen Ausführungen auf eine breitere Basis gestellt werden. Weiterhin müssen die anderen nichtlinearen Verfahren getestet werden. Schließlich ist der Ausbau zum dynamischen Modell erforderlich.

Bezüglich einer unmittelbaren *Anwendung auf praktische Probleme* ist zu sagen, daß die vorgeführte Methode der bisher eingesetzten Linearplanungsmethode überall dort überlegen ist, wo die sachlichen Gegebenheiten zu einer nichtlinearen Deckungsbeitragsfunktion führen. Das ist gemeinhin schon bei mittelfristigen, bestimmt aber bei langfristigen Planungen der Fall. Wenn nämlich über den zweckmäßigen Einsatz von Großmaschinen und Gebäuden entschieden werden muß, tritt die Nichtlinearität der Zielfunktion hervor. Damit ist aber von sachlicher Seite der größte Teil der Planungsaufgaben angesprochen, der mathematische Planungsverfahren erfordert.

Gegenüber den vielen Versuchen, das lineare Planungsmodell durch entsprechende Ansatzformulierungen (z. B. Doppelaktivitäten auf verschiedenen Niveaus, Transfer-Aktivitäten, relative Schreibweise usw.) so herzurichten, daß es den realen Verhältnissen gerecht wird, hat die hier vorgetragene Methode den Vorteil der inneren Geschlossenheit des Algorithmus. Damit ist ein wesentliches Kriterium der mathematischen Planungsverfahren im Vergleich zu den früheren Planungsverfahren und den korrigierten Linearplanungsansätzen voll gewahrt: die Simultaneität der Datenverarbeitung. Vor- und Nachrechnungen nehmen keinen wesentlich größeren Umfang ein als bei der Linearplanung. Lediglich die Bestimmung der nichtlinearen Deckungsbeiträge ist zeitaufwendiger; diese Aufgabe kann aber zum größten Teil mit Elektronenrechnern

[1]) Die sachlichen Probleme einer Stellengemeinkostenverteilung bleiben durch dieses Vorgehen unberührt; sie werden weder verschlechtert noch verbessert.

durchgeführt werden. Dafür bleiben aber sehr oft die Matrizes durch Vermeidung von Doppel- und Transfer-Aktivitäten kleiner. Bei besserer Erfassung der praktischen Gegebenheiten kann also mit diesem Verfahren weiterhin „aus einem Guß" geplant werden.
Ein besonderer Anwendungsbereich erwächst der nichtlinearen Programmierung im Rahmen von Aussiedlungen und anderen agrarstrukturellen Maßnahmen, da hier stets für längere Zeiträume geplant wird. In allen Fällen, in denen nach neuen Lösungen gesucht werden muß, sollte man den etwas höheren Aufwand zeitlicher und rechentechnischer Art, der mit den nichtlinearen Verfahren gegenüber Linearplanung und Programmplanung verbunden ist, nicht scheuen. Verglichen mit den Gesamtkosten einer Aussiedlung sind die materiellen und personellen Kosten der nichtlinearen Planungsrechnung immer noch gering und im Hinblick auf die Gefahr von Fehlinvestitionen gerade auf dem Gebiet der Aussiedlungen und Althofsanierungen durchaus gerechtfertigt.
Grundsätzlich kann man die Güte und Bedeutung eines Planunsverfahrens nicht nur an der Zahl der Anwendungsfälle messen; vielmehr müssen Methode und Aufgabe kongruent sein. Für den Einsatz der nichtlinearen Programmierung ist daher nicht die Menge sondern die *Schwierigkeit der Planungsaufgaben* entscheidend.

6 Zusammenfassung

Das reale Geschehen in der landwirtschaftlichen Produktion ist in den meisten Fällen durch quantitative Zusammenhänge nichtlinearer Art gekennzeichnet. Deshalb ergibt sich für die Betriebswirtschaftslehre des Landbaues die Aufgabe, im Rahmen der Ermittlung optimaler Betriebsorganisationen nach sachgerechten Lösungsmethoden zu suchen. Eines der in Betracht kommenden Planungsverfahren ist die *„Methode der projizierten Gradienten"* von ROSEN. Sie wird anhand eines praktischen Beispiels auf ihre generelle Eignung zur Erfassung einer nichtlinearen Zielfunktion untersucht.
In einer ersten Beispielsrechnung wird eine nichtlineare Zielfunktion behandelt, die sich aus der Berücksichtigung *nichtproportionaler Einzelkosten* ergibt.
Aus der Endlösung der Beispielsrechnung und ihrem Vergleich mit dem Ergebnis der Standard-Simplex-Methode der Linearplanung geht hervor:

1. Der im sachlichen Inhalt vergleichbare Deckungsbeitrag der Gradientenmethode liegt über dem der Linearplanung. Ursache dieses Resultates ist die konsequente Ausnutzung der Kostendegression bzw. Deckungsbeitragsprogression bei steigender Menge durch die Gradientenmethode.
2. Die Betriebsorganisation umfaßt lediglich 6 Prozesse gegenüber 8 Prozessen der Linearplanung. Die Prozesse, die im Rahmen der linearen Planungsrechnung nur einen geringen Umfang einnehmen, werden durch die Gradientenmethode ausgeschlossen, da ihr Beitrag zum Gesamtdeckungsbeitrag des Betriebes infolge der hohen Belastung mit nichtproportionalen Kosten relativ gering ist. Die Gradientenmethode wirkt somit in Richtung Betriebsvereinfachung und Spezialisierung.
3. Der höhere Deckungsbeitrag der Gradientenmethode wird mit einem geringeren Arbeitseinsatz als der niedrigere Deckungsbeitrag der Linearplanung erzielt. Bezüglich einer sparsamen Mittelverwendung ist somit das Ergebnis der nichtlinearen Programmierung dem der Linearplanung überlegen.

Die Anwendung der „Methode der projizierten Gradienten" bringt indessen methodische und sachliche Probleme mit sich, die von der Linearplanung her unbekannt sind. Die *methodischen Fragen* betreffen in erster Linie die Auswahl einiger Parameter.

1. Die *Gradiententoleranz* (Parameter ε_1) ist von unmittelbarem Einfluß auf das Ergebnis. Das beste Resultat im Sinne der Deckungsbeitragsmaximierung erbringt Parameter $\varepsilon_1 = 0{,}1$. Ein höherer Wert ($\varepsilon_1 = 0{,}5$) ergibt keine Verbesserung der Lösung. Dagegen wird der Deckungsbeitrag bei niedrigeren Werten ($\varepsilon_1 = 0{,}01 >$) geringer.
2. Die *Toleranz der Bedingungen* (Parameter ε_2) und die *Toleranz der linearen Abhängigkeit* (Parameter ε_3) liefern dann die besten Ergebnisse, wenn die von der Programmanleitung vorgeschlagenen Werte ($\varepsilon_2 = 0{,}001$; $\varepsilon_3 = 0{,}05$) eingehalten werden.
3. Die *maximale Schrittweite* (Parameter τ_{max}) kann für das vorliegende Beispiel in den Grenzen von $\tau_{max} = 100$ bis $\tau_{max} = 750$ variiert werden, ohne daß eine Änderung des Resultates eintritt.

Der rechentechnische *Zeitaufwand* der Gradientenmethode ist nicht größer als der Zeitbedarf der Linearplanung. Lediglich bei den vorbereitenden Arbeiten bestehen Unterschiede.

Neben methodischen Fragen sind auch noch einige *sachliche Probleme* von Bedeutung. Die Einflußwirkung der *Ausgangslösung* auf das Ergebnis der nichtlinearen Planungsrechnung mit Hilfe der Gradientenmethode kann dahingehend zusammengefaßt werden:

1. Das beste Ergebnis liefert ein Ansatz, der dem Optimum schon recht nahe kommt.
2. Auch die Ausgangslösung, bei denen alle Aktivitäten gleichgestellt sind, bringen zufriedenstellende Resultate. Hierbei kann es allerdings vorkommen, daß Aktivitäten mit geringem Umfang in die Endlösung gelangen.
3. Eine ungenaue Auswahl der Prozesse lohnt im allgemeinen nicht. Zwar kann dabei durchaus eine richtige Prozeßkombination erfaßt werden, doch ist der optimale Umfang der Prozesse damit noch nicht sichergestellt.
4. Werden die Prozesse besonders hervorgehoben, die in der Optimallösung nicht in das Endprogramm gelangen, dann findet die Gradientenmethode nur schwer zur richtigen Prozeßkombination. Betriebsorganisation und Gesamtdeckungsbeitrag lassen in diesem Fall sehr zu wünschen übrig. Wenn also nicht sicher ist, welche Prozesse in der Optimallösung erscheinen — was trotz gewisser Bedenken u. U. durch eine vorweggenommene Linearplanung erfolgen könnte —, dann sollte keine Vorauswahl der Prozesse erfolgen.

Die Restriktionen des Ansatzes können in absoluter und/oder relativer Schreibweise erfaßt werden.

Die *Zielfunktion* kann neben nichtlinearen Werten, die mit steigendem Umfang unterproportional zunehmen (konkav von unten, da $f'(a) > 0$ und $f''(a) < 0$), auch Werte, die mit steigendem Umfang unterproportional abnehmen (konvex von unten, da $f'(a) > 0$ und $f''(a) > 0$), sowie lineare Werte enthalten (vgl. Tab. 2).

Infolge der Möglichkeiten, sowohl nichtlineare Zusammenhänge zu erfassen als auch Restriktionen auf mehrere Prozesse zu transferieren, ist die Gradientenmethode, speziell die „Methode der projizierten Gradienten" in der Lage, eine rechnerisch einwandfreie *Verteilung der Gemeinkosten bzw. Stellengemeinkosten* innerhalb einer simultanen Datenverarbeitung vorzunehmen. Sie erfüllt damit Anforderungen der Theorie der landwirtschaftlichen Produktion bzw. allgemeinen Produktionstheorie, deren Lösung den bisher angewandten Planungsverfahren nicht mit der gleichen Schlüssigkeit möglich war. Damit führt die Gradientenmethode zu einer echten Erweiterung des methodischen Rüstzeuges der Betriebswirtschaftslehre des Landbaues.

Für die *Wissenschaft* ergeben sich als weitere Aufgaben die Einbeziehung nichtlinearer Restriktionen in das Planungsmodell sowie das Testen anderer Methoden und der Ausbau zum dynamischen Modell.

Die *praktische Anwendung* nichtlinearer Verfahren erstreckt sich auf mittel- und langfristige Planungen, wo über den Einsatz von Maschinen und Gebäuden befunden werden muß. Entscheidend ist hierbei weniger die Anzahl der Anwendungsmöglichkeiten als vielmehr die Schwierigkeit des Einzelfalles. Das Hauptproblem liegt darin, aus der Gesamtheit der Planungsaufgaben die schwierigen Fälle herauszufinden, um Sache und Mittel in Einklang zu bringen.

Literatur

1. ALLEN, R. G. D.: Mathematik für Volks- und Betriebswirte. Berlin 1956
2. BOGUSLAWSKI, E. v. und B. SCHNEIDER,: Die dritte Annäherung an das Ertragsgesetz. Z. f. Acker- und Pflanzenbau, 1.-3. Mitteilung, *114*, *116* und *119*
3. DRZ (Deutsches Rechenzentrum): Programme für Wirtschaftswissenschaften, Programm-Information P I-16, Oktober 1965. Herausgeber: Dipl.-Math. K. H. UHLEMANN
4. FRATZ, P.: Die betriebs- und marktwirtschaftlichen Voraussetzungen einer Betriebsvergrößerung durch Futtermittelzukauf in strukturell benachteiligten Räumen der Bundesrepublik. Diss. Gießen 1963
5. GUTENBERG, E.: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, 1. Band: Die Produktion. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960
6. HEADY, O. E. und W. CANDLER: Linear Programming Methods, Ames, Iowa, USA 1960
7. HEADY, O. E. und J. L. DILLON: Agricultural Production Functions, Ames, Iowa, USA 1961
8. JOKSCH, H. C.: Lineares Programmieren. Tübingen 1962
9. KEHRBERG, E. W. und E. REISCH: Wirtschaftslehre der landwirtschaftlichen Produktion. München—Basel—Wien 1964
10. KILGER, W.: Produktions- und Kostentheorie. Wiesbaden 1958
11. KRELLE, W. und H. P. KÜNZI: Lineare Programmierung. Zürich 1958
12. KTL: Kalkulationsunterlagen für Betriebswirtschaft, Band 2: Maschinen- und Gebäudekosten i. d. Landwirtschaft. Wolfratshausen 1964
13. KÜNZI, H. P. und W. KRELLE: Nichtlineare Programmierung. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962
14. MEIMBERG, P., H. WIEDERHOLD, und H. SEUSTER,: Vereinfachte Betriebsberechnung mit Investitionsplanung und Liquiditätskontrolle, 2. Auflage. Gießen 1964
15. MEIMBERG, P.: Landwirtschaftliches Rechnungswesen. Stuttgart 1966
16. MELLEROWICZ, K.: Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Band II. Berlin 1959
17. MERRILL, R. P. und J. B. ROSEN: Gradient Projection/7090, Program Description and Use, Project No. 34430, Techniques of Mathematical Analysis, Technical Report No. 219—62
18. MITSCHERLICH, A E.: Die Ertragsgesetze. Berlin 1948
19. REISCH, E.: Die lineare Programmierung in der landwirtschaftlichen Betriebswirtschaft. München—Basel—Wien 1961
20. ROSEN, J. B.: The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Linear constraints. J. Soc. for Ind. and Applied Math. Part I, 8/1960
21. SCHÖNFELD, H. M.: Kostenrechnung, 2. Auflage, Sammlung Poeschel. Stuttgart 1964
22. SEUSTER, H.: Landwirtschaftliche Betriebslehre, Sammlung Poeschel. Stuttgart 1966
23. DERS.: Die Verteilung von Stellengemeinkosten in der Planungsrechnung (Manuskript.) Gießen 1966
24. STACKELBERG, H. v.: Grundlagen der theoretischen Volkswirtschaftslehre. Tübingen-Zürich 1951
25. URFF, W. v.: Anpassung in den Betriebsgrößen. In: Anpassung der Landwirtschaft an die veränderten ökonomischen Bedingungen. 176. Sonderheft der Berichte über Landwirtschaft. Hamburg—Berlin 1963
26. DERS.: Produktionsplanung in der Landwirtschaft. Berlin 1964
27. WEINSCHENCK, G.: Die optimale Organisation des landwirtschaftlichen Betriebes. Hamburg—Berlin 1964
28. ZAPF, R.: Die Anwendung der linearen Optimierung in der landwirtschaftlichen Betriebsplanung. 179. Sonderheft der Berichte über Landwirtschaft. Hamburg—Berlin 1965