La programmation mathématique positive dans les modèles d'exploitation agricole

Principes et importance du calibrage

Alexandre GOHIN
Frédéric CHANTREUIL

Alexandre GOHIN*, Frédéric CHANTREUIL*

Positive mathematical programming in agricultural economics. Principles and importance of calibrating

Key-words:
positive mathematical programming, agricultural production, land allocation, calibration procedure

Summary *– The modelling of agricultural producer behaviour using mathematical programming has a long tradition in agricultural economics. The linear mathematical programming approach has been prevalent in this field for a long time. But linear programming models, that are tightly constrained to reproduce agricultural producers' choices observed at the base period, are often unacceptable and also inappropriate under policy changes. Several researchers have alluded to this problem in the past and came up with several solutions such as incorporating risk or considering "flexibility" constraints. Furthermore, to solve this problem, new methodological developments also occurred, including Positive Mathematical Programming (PMP). PMP emerged more than ten years ago but its formal presentation is relatively recent. In this article, we first present the principles of PMP, using a simple example of an arable crop producer. It appears that the two main advantages of PMP are its perfect calibration to base period levels of endogenous variables and its derivation of smooth simulation results, both resulting from the incorporation of non linear terms in the objective function. Empirical implications of the standard PMP's parameter calibration process are then discussed.*

La programmation mathématique positive dans les modèles d'exploitation agricole. Principes et importance du calibrage

Mots-clés:
programmation mathématique positive, production agricole, allocation de la terre, processus de calibrage

Résumé – La modélisation du comportement des agriculteurs par la programmation mathématique a une longue tradition en économie agricole. La Programmation mathématique linéaire (PML) a longtemps prédominé mais la Programmation mathématique positive (PMP) s'impose maintenant de plus en plus. La différence essentielle de la PMP par rapport à la PML réside dans la spécification de fonctions non linéaires, permettant ainsi de calibrer de manière exacte les modèles et d'éviter les discontinuités caractérisant les modèles PML et leurs résultats. Cet article présente tout d'abord les principes et la mise en œuvre standard de la PMP. La discussion est ensuite centrée sur un aspect de cette approche, à savoir le calibrage des paramètres de comportement.

* *INRA, Unité d'économie et sociologie rurales, rue Adolphe Bobierre, CS 61103, 35011 Rennes cedex.*
e-mail : gohin@roazhon.inra.fr ; chantreuil@roazhon.inra.fr

Les auteurs tiennent à remercier ici la Direction générale de l'Agriculture de la Commission européenne pour son soutien financier dans le cadre du projet FAIR 5-CT97-3481. Ils remercient également les deux lecteurs anonymes de la revue pour leurs remarques et suggestions. Ils sont cependant seuls responsables du contenu de l'article.

LA modélisation du comportement des agriculteurs à l'offre de produits et/ou à la demande dérivée d'intrants par la programmation mathématique est une longue tradition en économie agricole[1]. De manière très générale, les modèles de programmation mathématique appliqués au niveau de l'exploitation agricole individuelle consistent à déterminer les niveaux des variables de décision de cette exploitation qui maximisent une variable économique sous des contraintes techniques. La variable économique maximisée est généralement le profit et la marge brute de l'exploitation, plus rarement les recettes brutes ou l'opposé des coûts. Les contraintes techniques définissent implicitement un ensemble de production convexe par rapport aux variables de décision de l'exploitation. Ces modèles de programmation mathématique permettent alors de représenter le fonctionnement technico-économique des exploitations agricoles et de simuler les impacts de chocs exogènes (un changement de politique agricole par exemple) sur leurs variables de décision.

Si les fondements de la programmation mathématique sont relativement simples et cohérents avec la théorie micro-économique néoclassique du producteur, la mise en œuvre de cette approche est nettement plus délicate. Deux problèmes majeurs se posent pour le modélisateur qui dispose souvent d'un ensemble limité d'informations: la spécification de la fonction objectif et des contraintes techniques, d'une part, le calibrage des paramètres introduits dans ces fonctions, d'autre part. La programmation mathématique linéaire (PML) est un cas particulier de cette modélisation où la fonction objectif et les contraintes techniques sont spécifiées de manière linéaire par rapport aux variables de décision. Cette approche linéaire, longtemps prédominante en économie agricole, offre l'avantage d'être plus facile à résoudre que les approches non linéaires[2]. De plus, la spécification linéaire permet de borner le nombre de paramètres à calibrer à $(m + 1)$ fois le nombre de variables de décision, où m représente le nombre de contraintes techniques. Enfin et surtout, la PML représente des technologies de production de type Leontief; les paramètres des contraintes techniques de production s'interprètent alors comme des coefficients inputs-outputs (Just *et al.*, 1983). Le calibrage déterministe de ces derniers peut alors être réalisé à partir d'informations techniques extérieures à la modélisation. Mais cette relative simplicité de

[1] A notre connaissance, les premiers modèles de programmation mathématiques en économie agricole datent du début des années 50 avec les travaux de King (1953) et de Heady (1954).

[2] Cet argument en faveur de l'utilisation de la PML est aujourd'hui moins pertinent.

mise en œuvre de la PML a plusieurs revers. En particulier, cette approche ne permet généralement pas de reproduire exactement les prises de décision observées des agriculteurs, sauf si des contraintes techniques très sévères « figeant » le modèle sont introduites. Par ailleurs, la simulation de scénarios avec la PML entraîne soit aucun changement, soit des « basculements » importants dans les décisions des agriculteurs. En d'autres termes, les modèles de PML produisent des résultats discontinus et peuvent conduire à des spécialisations extrêmes des exploitations agricoles dans certaines productions.

Ces problèmes de la PML ont déjà été mentionnés à plusieurs reprises (par exemple, McCarl, 1982; Hazell et Norton, 1986, Heckelei, 1997). De nombreux développements de la modélisation par la programmation mathématique ont alors cherché à dépasser ces problèmes, et ont donné progressivement naissance à la Programmation mathématique positive (PMP)[3]. Bien qu'étant appliquée depuis plus de dix ans, la présentation formelle de cette méthode par Howitt est relativement récente (Howitt, 1995a) et depuis, de nombreuses études ou articles finalisés s'appuient sur cette méthode[4]. La PMP permet de calibrer de manière exacte les modèles d'exploitation agricole en utilisant un ensemble de données restreint tout en ne figeant pas le modèle. La différence essentielle de la PMP par rapport à la PML réside dans la spécification de fonctions non linéaires qui permettent alors de reproduire une situation observée et de « lisser » les résultats de scénarios. La non-linéarité a été principalement introduite dans la fonction objectif du profit au niveau de la fonction de production (Howitt, 1995a) ou des coûts de production (Arfini et Paris, 1995).

Dans cet article à vocation méthodologique, les objectifs sont doubles. Le premier objectif est de préciser les fondements théoriques et d'expliciter la mise en œuvre « standard » de cette approche PMP. Ceci nous permet en particulier de souligner les apports de celle-ci en économie de la production agricole. A partir de cette présentation, le second objectif de cet article est de souligner et de discuter une des limites de cette mise en œuvre standard. Cette limite provient de la méthode de calibrage des paramètres de comportement. Les principales solutions proposées dans la littérature pour résoudre ce problème sont expliquées avant d'en suggérer une nou-

[3] Une autre extension de la programmation mathématique concerne l'introduction du risque au niveau des rendements par hectare et/ou des prix des cultures et/ou des aides directes. Dans ce cadre, l'exploitation agricole ne maximise pas son profit mais l'utilité espérée de son profit (voir Boussard *et al.*, 1997). Une discussion de cette approche dépasse le cadre de cet article.

[4] Voir, entre autres, Heckelei et Britz (1999); Garvey et Steele (1998); Paris et Howitt (1998); Barkaoui et Butault (1998); Judez *et al.* (1999, 1998); Rhöm *et al.* (1997); Carles *et al.* (1998); Britz et Heckelei (1997); Arfini (1996); Arfini et Paris (1995); Howitt (1995b).

velle. A l'inverse des premières, cette dernière est basée sur l'utilisation de la seule information disponible dans les bases de données. Précisons à ce stade qu'il ne s'agit pas ici de fournir une présentation exhaustive de la littérature sur la PMP, ni de discuter de tous les problèmes inhérents à cette méthodologie mais plutôt d'en détailler un aspect.

L'article est organisé de la façon suivante : les principes et la mise en œuvre classique de la PMP sont présentés à l'aide d'un exemple simple représentant le comportement d'un agriculteur à l'offre de produits de grandes cultures dans une première partie. Cet exemple est utilisé dans la suite de l'article pour illustrer nos propos. La seconde partie est consacrée au problème du calibrage des paramètres de comportement.

PRINCIPES ET MISE EN ŒUVRE DE LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE POSITIVE

Pour présenter les principes et la mise en œuvre classique de la PMP, nous considérons le cas réel d'une exploitation agricole française spécialisée en grandes cultures[5]. Les données de cette exploitation, reportées dans l'annexe 1, sont issues du Réseau d'information comptable agricole (RICA) et sont relatives à l'année 1997. Les informations qu'il est possible d'obtenir aisément à partir de cette base de données sont limitées aux surfaces consacrées à chaque culture (l_i), aux quantités produites (y_i) et aux valeurs des productions ($p_i.y_i$) de chaque culture. Peuvent être alors déduits de ces informations les rendements à l'hectare (r_i) et les prix à la production (p_i) pour chaque culture. Les aides directes à l'hectare (s_i) sont supposées également facilement observables. Par contre, les coûts de production imputables à chaque culture ne sont pas renseignés dans cette base de données mais seulement des données sur les différents coûts variables de production pour l'ensemble des cultures (par exemple, les coûts de production en engrais ou en produits phytosanitaires). Enfin, un coût total de production de végétaux inclut l'ensemble de ces coûts variables de production. Nous supposons dans le reste de cet article que le modélisateur ne dispose que de ces données pour élaborer un modèle de PMP. Nous supposons par ailleurs que l'objectif de ce modèle est de simuler le comportement de cette exploitation agricole dans ses choix d'allocation de sa surface totale et ses niveaux de production suite à un choc exogène, de politique agricole

[5] Pour une application de la PMP au secteur de l'élevage, voir Bauer et Kasnakoglu (1990).

par exemple. Par souci de simplification, nous supposons enfin que cette simulation est effectuée à court terme, *i.e.* à structure constante de l'exploitation (les niveaux de capital, de main-d'œuvre et de terre sont fixés). Même si elles peuvent paraître réductrices pour présenter la PMP, il convient de noter que ces deux dernières hypothèses sont adoptées dans de nombreuses études utilisant cette approche.

Les principes de la programmation mathématique positive

Dans le cadre usuel de la théorie micro-économique néoclassique du producteur, l'exploitation agricole choisit une allocation de sa surface totale et des niveaux de production qui maximisent son profit, étant donné les contraintes techniques de production, le système de prix et les instruments de politique agricole. Les prix sont supposés exogènes et les anticipations sur ces prix rationnelles. Au niveau de la politique agricole, les aides directes sont supposées parfaitement couplées au facteur terre. En ce qui concerne les contraintes techniques de production, l'exploitation agricole est tout d'abord limitée par sa surface totale ; la somme des surfaces cultivées est inférieure ou égale à cette surface totale.

De nombreuses autres contraintes techniques interviennent également dans le programme économique de l'exploitation agricole : contrainte agronomique, pédologique, climatique, de capital, de disponibilité de main-d'œuvre, etc. Introduire ces contraintes dans le modèle suppose des informations précises dont le modélisateur ne dispose généralement pas. Ces contraintes doivent cependant être prises en compte pour deux raisons principales. D'une part, sans ces contraintes, le modèle ne pourra pas reproduire les choix initiaux de production de l'exploitation. D'autre part, lors de la phase de simulation, un choc donné peut produire des changements importants dans les assolements, voire des « basculements » d'une culture à une autre ; par exemple, une baisse modérée de la marge d'une culture peut conduire à sa suppression. Ces problèmes sont rencontrés avec les modèles de PML.

La première idée de la PMP par rapport à la PML pour résoudre ce problème de spécification des « autres » contraintes techniques est de représenter indirectement ces dernières dans la fonction objectif. Dans la pratique, une fonction de coût de production (Arfini et Paris, 1995) ou des fonctions de rendement à l'hectare (Howitt, 1995a) ou encore des fonctions de coût et de rendement (Barkaoui et Butault, 1999) sont spécifiées pour « résumer » dans un cadre statique ces autres contraintes techniques, qui peuvent être de nature dynamique. Nous supposons ici que les rendements à l'hectare sont exogènes et de ce fait, les décisions d'allocation de la terre sont identiques aux décisions de production. Les autres contraintes techniques sont donc incorporées dans une fonction de coût de production[6][7]. Notons à ce stade que cette hypothèse ne fait que déplacer le problème de spécification des autres contraintes techniques vers la fonction de coût de production. Elle n'assure, a priori, ni la reproduction de la situation initiale, ni un comportement lisse du modèle. En outre, cette procédure « dénature » en quelque sorte la programmation mathématique dans la mesure où l'ensemble convexe des productions possibles n'est plus uniquement décrit de manière primale par les contraintes techniques mais également de manière duale à travers la fonction de coût de production.

La deuxième idée de la PMP consiste à considérer que l'allocation choisie par l'exploitation agricole et observée par le modélisateur est une allocation optimale, c'est-à-dire qui maximise son profit étant donné ces contraintes (techniques, de prix et de politique agricole). Ainsi, les données observées peuvent servir de base au calibrage des paramètres spécifiés dans la fonction de coût de production. Généralement, seules les données d'une année de référence sont prises en compte par le modélisateur pour calibrer de manière déterministe ces paramètres. Cette procédure de calibrage garantit que le modèle reproduit l'allocation de la terre et les volumes produits de l'année de référence.

Enfin, la troisième et dernière idée de la PMP réside dans la spécification non linéaire, par rapport aux variables de décision, de la fonction de coût de production. Le profit de l'exploitation agricole est alors également non linéaire par rapport aux variables de décision. Dans ce cas, les profits marginaux à l'hectare, qui déterminent l'allocation optimale de la surface totale, sont fonction des surfaces allouées à chaque culture. Cette spécification non linéaire assure un comportement « lisse » du modèle. Dans la pratique, afin de limiter le nombre de paramètres à calibrer, la fonction de coût de production est souvent supposée être égale à la somme des fonctions de coûts variables de production par culture, ces dernières étant généralement spécifiées comme des fonctions quadratiques des volumes produits[8].

[6] L'autre solution adoptée dans certaines applications et qui consiste à supposer des coûts de production constants et à spécifier des fonctions de rendements à l'hectare n'est pas retenue ici car les coûts de production par culture ne sont pas observables pour le modélisateur.

[7] Cette fonction de coût n'inclut pas les coûts fixes car le raisonnement est mené à court terme.

[8] Cette spécification a certes le mérite de la parcimonie mais impose de fortes hypothèses sur les jointures entre les différentes productions. En particulier, elle implique que la jointure provienne uniquement de l'existence d'un facteur fixe allouable (la terre) (Guyomard *et al.*, 1996). Il est plus rarement spécifié une fonction de coût de production multi-cultures. En effet, l'introduction de termes croisés dans la fonction de coût total augmente considérablement le nombre de paramètres et rend plus difficile le calibrage de ceux-ci (Paris et Howitt, 1998). D'autres formes fonctionnelles ont été testées (Arfini et Paris, 1995).

La mise en œuvre standard de la programmation mathématique positive

L'écriture mathématique d'un modèle de programmation mathématique positive

Le modèle « standard » de PMP pour l'exploitation agricole décrite dans l'annexe 1 s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&\max_{l_i, y_i} \sum_{i=b,m,p} \left(p_i y_i + s_i l_i - C_i(y_i)\right)\\&= \max_{l_i} \sum_{i=b,m,p} \left(p_i r_i l_i + s_i l_i - C_i(r_i l_i)\right)\end{aligned} \tag{1}$$

sous la contrainte :

$$\sum_{i=b,m,p} l_i \leq \bar{l} \tag{2}$$

L'équation (1) définit le profit de l'exploitation agricole. Il est égal à la somme des productions en valeur plus les aides directes aux surfaces moins la somme des coûts variables de production par culture. Ce coût variable par culture est supposé être une fonction non linéaire de la surface allouée à celle-ci. L'inégalité (2) correspond à la contrainte de terre disponible. Cette contrainte implique que la somme des surfaces allouées aux différentes cultures ne peut être supérieure à la surface totale de l'exploitation.

Les conditions du premier ordre de ce programme d'optimisation sont les suivantes :

$$p_i r_i + s_i - \frac{\partial C_i(r_i l_i)}{\partial l_i} - \alpha \leq 0, \tag{3}$$

$$l_i \geq 0, \left(p_i r_i + s_i - \frac{\partial C_i(r_i l_i)}{\partial l_i} - \alpha\right) l_i = 0, \quad \forall\ i = b, m, p$$

$$\sum_{i=b,m,p} l_i - \bar{l} \leq 0, \quad \alpha \geq 0, \left(\sum_{i=b,m,p} l_i - \bar{l}\right)\alpha = 0 \tag{4}$$

où α désigne le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de disponibilité de terre. Ce multiplicateur mesure l'impact sur le profit d'une variation marginale de la surface totale de l'exploitation ; il peut s'interpréter comme le prix d'opportunité de la terre pour l'exploitation considérée.

Les équations (3) signifient que la surface allouée à la culture i est strictement positive uniquement lorsque le profit marginal à l'hectare dégagé par cette culture est égal au prix d'opportunité de la terre. Cette surface peut être également nulle dans ce cas. La surface allouée à une culture est par contre nulle lorsque ce profit marginal est strictement inférieur au prix d'opportunité de la terre. De la même manière, d'après les équations (4), le prix d'opportunité de la terre est strictement positif uniquement lorsque la somme des surfaces allouées aux différentes cultures est égale à la surface totale disponible.

Pour résoudre ce modèle, il reste à spécifier la forme des fonctions de coût variable de production par culture et calibrer les paramètres de celles-ci. L'éventail des formes possibles est bien évidemment large. Pour des raisons de commodité, la forme quadratique est usuellement utilisée. Nous supposons ici que ces fonctions s'écrivent :

$$C_i(y_i) = b'_i y_i = C_i(r_i l_i)\, b_i l_i^2, \quad \forall i = b, m, p \tag{5}$$

Selon cette spécification, le coût marginal de production est une fonction croissante du volume produit et également de la surface allouée à la culture considérée. Le problème qui se pose alors est de calibrer les paramètres b_i ou b'_i, sachant que les valeurs des coûts variables de production par culture ne sont pas observées.

Le calibrage des paramètres des fonctions de coût

La méthode de calibrage s'effectue en deux étapes. Dans une première étape, le modèle de PML constitué des équations (1), (2) est résolu en supposant que les paramètres des fonctions de coût variable de production sont nuls et en introduisant des contraintes spécifiques de calibrage. Ces contraintes assurent que les surfaces allouées à chaque culture sont inférieures ou égales aux surfaces initialement observées plus un petit terme positif. Ce dernier est introduit pour éviter la dépendance linéaire entre la contrainte de disponibilité de la terre et les contraintes spécifiques de calibrage. La résolution de ce modèle détermine des valeurs duales qui fournissent une mesure des coûts marginaux de production de chaque culture. Dans une seconde étape, ces valeurs duales sont utilisées pour calibrer les paramètres des fonctions de coût variable de production. La mise en œuvre de cette procédure de calibrage est plus amplement détaillée sur la base de l'exploitation décrite dans l'annexe 1. La première étape consiste à résoudre le programme suivant :

$$\max_{l_i} \sum_{i=b,m,p} (p_i r_i + s_i) l_i = \max 9745 l_b + 9555 l_m + 9585 l_p \tag{6}$$

sous les contraintes :

$$l_b + l_m + l_p \leq \bar{l} = 107 \tag{7}$$

$$l_b \leq l_b^0 + \varepsilon = 63{,}66 \tag{8.i}$$

$$l_m \leq l_m^0 + \varepsilon = 28{,}21 \tag{8.ii}$$

$$l_p \leq l_m + \varepsilon = 15{,}16 \tag{8.iii}$$

où l_i^0 désigne la surface initiale allouée à la culture i et $\varepsilon = 0{,}01$. Les variables duales associées aux contraintes (8.i), (8.ii) et (8.iii) sont respectivement λ_b, λ_m et λ_p. La résolution de ce modèle linéaire conduit à la solution optimale suivante :

$$l_b = l_b^0 + \varepsilon = 63{,}66 \ ; \ l_m = l_m^0 - 2\varepsilon = 28{,}19 \ ; \ l_p = l_p^0 + \varepsilon = 15{,}16 \ ;$$
$$\alpha = p_m r_m + s_m = 9555 \ ;$$
$$\lambda_b = p_b r_b + s_b - p_m r_m - s_m = 190 \ ; \ \lambda_m = 0 \quad \text{et}$$
$$\lambda_p = p_p r_p + s_p - p_m r_m - s_m = 30 .$$

Le prix d'opportunité de la terre est égal à la recette brute dégagée par la culture d'un hectare de maïs grain. En effet, si la surface totale varie d'un faible montant, alors la surface en maïs grain varie d'un même montant tandis que les autres surfaces restent inchangées à cause des contraintes spécifiques de calibrage. L'impact sur le profit de cette variation de la surface totale est par conséquent bien égal à la « recette brute maïs grain ». λ_b mesure l'intérêt, en terme de recette brute totale, de l'augmentation marginale de la surface allouée à la culture de blé tendre. Elle est égale à la différence entre la recette brute blé tendre et la recette brute maïs grain. De même, λ_p mesure l'intérêt de la culture de pois protéagineux et est égale à la différence entre la recette brute protéagineux et la recette brute maïs grain. Enfin, la dernière variable duale est nulle car la contrainte (8.ii) n'est pas saturée. Ces trois variables duales fournissent une mesure des coûts marginaux de production de chaque culture qui permettraient d'obtenir, à partir d'un modèle de programmation mathématique sans les contraintes spécifiques de calibrage ci-dessus, les allocations observées initialement. Ces variables duales fournissent donc de l'information pour calibrer les paramètres des fonctions de coût variable de production.

Dans une seconde étape, les paramètres des fonctions de coût variable de production sont alors calibrés à partir des valeurs des variables duales. Ces paramètres sont donnés par les équations suivantes :

$$b_i = \lambda_i /(2l_i^0), \quad \forall\ i = b,\ m,\ p \tag{9}$$

soit $b_b = 1{,}492$, $b_m = 0$ et $b_p = 0{,}0990$.

Deux remarques peuvent être formulées à ce stade. D'une part, l'équation (9) n'est pas valide si la surface initialement allouée à la culture i est nulle. Ceci implique en particulier que cette méthode ne permet pas de « calibrer » les cultures qui ne sont pas produites lors de l'année de référence[9]. D'autre part, la spécification de fonctions de coût variable parcimonieuses dans les paramètres permet de calibrer aisément ceux-ci. Si, au contraire, les fonctions de coût variable dépendent d'un nombre de paramètres supérieur au nombre de cultures, par l'inclusion de termes croisés par exemple, alors des informations extérieures sont nécessaires pour calibrer l'ensemble des paramètres. La méthode d'entropie est une réponse possible et élégante à ce problème (Paris et Howitt, 1998).

Cette procédure de calibrage déterministe des modèles de PMP offre donc l'énorme avantage de calibrer automatiquement les modèles en utilisant peu de données. La PMP est donc particulièrement intéressante lorsque peu de données sont disponibles. Par ailleurs, cette approche garde les avantages de la programmation mathématique classique. D'un point de vue technique, la première étape de la procédure de calibrage sert à « révéler » les valeurs des coûts marginaux de production (Arfini et Paris, 1995) qui, dans la seconde étape, permettent de calibrer les paramètres des fonctions de coût variable de production. Cependant, comme tout travail de modélisation, les résultats fournis par les modèles de PMP sont conditionnels aux hypothèses adoptées dans la conception et la mise en œuvre de ceux-ci. Une hypothèse admise ci-dessus est à présent discutée.

LE CALIBRAGE DES PARAMÈTRES DE COMPORTEMENT

Dans le processus de calibrage des paramètres des fonctions de coût variable, le coût marginal de production de la culture la moins profitable, *i.e.* le maïs grain, est calibré à zéro. Ceci vient du fait que la variable duale associée à la contrainte spécifique de calibrage pour cette culture est nulle. Cette conséquence de la procédure standard de calibrage n'est évidemment pas très réaliste.

[9] Ce problème d'auto-sélection n'est pas spécifique aux modèles de PMP.

L'introduction d'informations sur les coûts variables de production de chaque culture

Une première solution à ce problème, souvent trouvée dans la littérature, s'appuie sur l'hypothèse que le modélisateur, même s'il ne peut disposer d'informations sur la vraie valeur des coûts variables de production pour chaque culture, peut tout de même observer certains de ces coûts variables[10]. Ces derniers sont notés a_i . Cette information supplémentaire peut ne pas être suffisante
pour que les modèles de PML reproduisent exactement la situation de référence. La spécification non linéaire des fonctions de coût variable de production est donc toujours nécessaire. Dans ce cas, les fonctions de coût variable de production par culture sont spécifiées de la manière suivante:

$$C_i(y_i) = a'_i y_i + b'_i y_i^2 = C_i(r_i l_i) = a_i l_i + b_i l_i^2, \quad \forall i = b, m, p \quad (10)$$

La première étape du processus de calibrage des paramètres des fonctions de coût variable consiste alors à résoudre le modèle de PML suivant:

$$\max_{l_i} \sum_{i=b,m,p} (p_i r_i + s_i - a_i) l_i \quad (11)$$

sous les contraintes (7) et (8) définies ci-dessus.

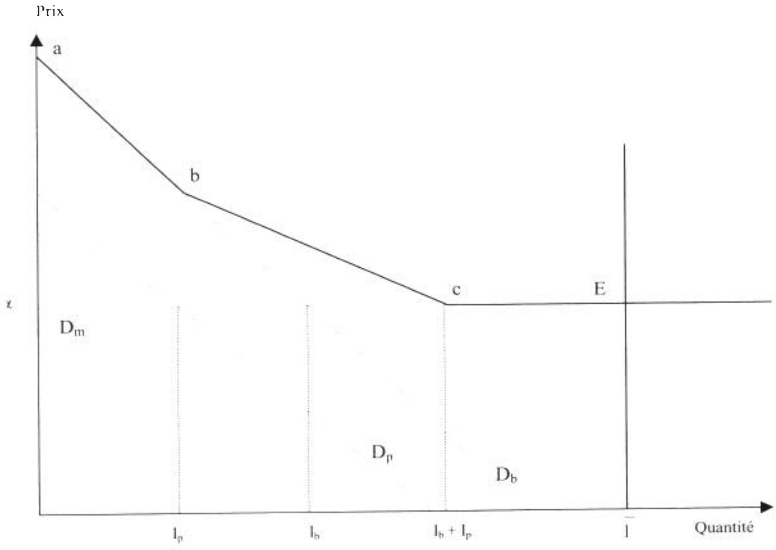
Les variables duales associées aux contraintes (8) mesurent les coûts marginaux de production supplémentaires (par rapport aux a_i) qui permettraient d'obtenir l'allocation initiale comme situation optimale. Ces variables duales permettent de calibrer les paramètres b_i des fonctions de coût variable de production par culture (10), de la même manière que dans le cadre standard. Le coût marginal de production de la culture la moins profitable n'est plus nul et est fonction de a_i. Ce coût marginal est donc indépendant de la surface allouée ou du niveau de production, ce qui soulève une autre difficulté. En effet, dans ce cas, le profit marginal de la culture la moins profitable est égal au profit moyen. En d'autres termes, ceci revient implicitement à supposer des rendements d'échelle constants pour cette culture. Les problèmes découlant de cette hypothèse sont illustrés graphiquement.

Le graphique 1 représente les demandes dérivées inverses de terre pour chaque culture en fonction de leur surface allouée. La demande dérivée inverse de terre pour la culture de blé tendre est représentée par la courbe D_b, celle relative à la culture de pois protéagineux par la courbe D_p. La demande dérivée inverse de terre pour la culture de

[10] Cette hypothèse est admise par de nombreuses études finalisées qui ne précisent généralement pas la provenance de cette information supplémentaire et/ou la manière dont elle a été élaborée.

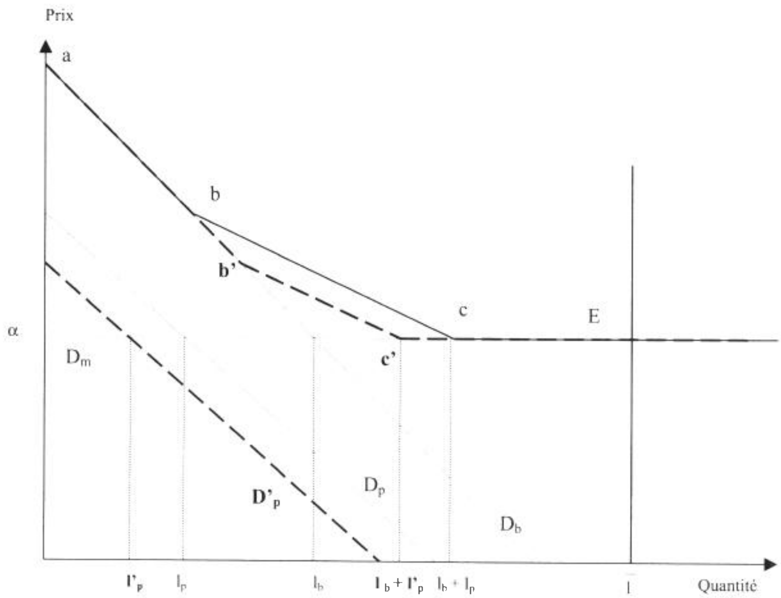
maïs grain est quant à elle représentée par la courbe horizontale d'ordonnée α (courbe D_m), en vertu de l'hypothèse de rendements d'échelle constants. La demande dérivée inverse totale de terre dans l'exploitation considérée est donnée par sommation horizontale des trois demandes dérivées inverses précédentes. La courbe correspondante passe par les points abcE. La terre disponible pour ces trois cultures dans l'exploitation est supposée exogène ; la courbe d'offre est donc verticale au niveau $\bar{l}$. L'équilibre sur le marché de la terre dans cette exploitation est alors atteint au point E. Le prix d'opportunité d'équilibre est α et les allocations l_b pour le blé tendre, l_p pour les pois protéagineux et enfin $l_m = \bar{l} - l_b - l_p$ pour le maïs grain.

Graphique 1.
Principe d'allocation de la terre dans une exploitation agricole



Supposons maintenant que la demande dérivée de terre pour la culture de pois protéagineux diminue de manière exogène (par exemple, sous l'effet de la baisse de l'aide directe correspondante). La demande dérivée inverse pour la culture de pois protéagineux se déplace alors parallèlement par rapport à sa position initiale et est maintenant représentée par la courbe D'_p sur la figure 2. La demande dérivée inverse totale de terre est représentée par la courbe passant par les points ab'c'E. L'offre de terre étant inchangée, l'équilibre est toujours atteint au point E. Par conséquent, le prix d'opportunité de la terre est toujours égal à α, c'est-à-dire au profit moyen ou marginal d'un hectare de maïs grain. Par suite, la surface consacrée à la culture de blé tendre est inchangée. Seules les surfaces allouées aux cultures de pois protéagineux et de maïs grain sont modifiées par un tel scénario. La surface en pois protéagineux devient l'_p et la surface en maïs grain $l_m = \bar{l} - l_b - l'_p$.

Graphique 2.
Impact d'une modification d'une demande dérivée inverse de terre sur l'allocation de la terre



Le principal problème de l'hypothèse de rendements d'échelle constants, illustré par l'exemple ci-dessus, est que le prix d'opportunité de la terre est figé au profit marginal de la culture à rendements d'échelle constants[11]. Il s'ensuit qu'un choc exogène sur une culture modifie uniquement les surfaces allouées à cette culture et à la culture à rendements d'échelle constants, pourvu que la surface allouée à cette dernière ne soit pas nulle[12]. Pour dépasser ces problèmes, il est alors nécessaire de lever l'hypothèse de rendements d'échelle constants pour la culture la moins profitable, *i.e.* de rendre la courbe D_m à pente strictement négative. Ceci nécessite une information supplémentaire cruciale qui n'est pas obtenue à partir de la première étape du processus standard de calibrage du modèle de PMP[13].

L'introduction d'une information sur le prix d'opportunité de la terre

Une seconde solution, adoptée dans certaines études finalisées, au problème de calibrage des paramètres de la culture « marginale » consiste à repartir des équations d'optimalité (3). Avec la spécifica-

[11] Excepté les cas où un choc entraîne un déplacement vers le haut des courbes de demande dérivée de terre des cultures à rendements d'échelle décroissants, tel que le point c se situe à droite de la courbe verticale d'offre.

[12] Ce résultat est indépendant du nombre de cultures prises en compte dans l'analyse.

[13] Leclaire (1997) suppose de manière arbitraire que le profit marginal de la culture la moins profitable est égal à 0,9 fois le profit moyen de celle-ci.

tion (5) des fonctions de coût variable de production, ces équations s'écrivent :

$$\begin{gathered} p_i r_i + s_i - 2b_i l_i - \alpha \leq 0, l_i \geq 0, \\ (p_i r_i + s_i - 2b_i l_i - \alpha) l_i = 0, \quad \forall i = b, m, p \end{gathered} \tag{12}$$

Rappelons ici que le multiplicateur de Lagrange α s'interprète comme le prix d'opportunité de la terre pour l'exploitation considérée. Si le modélisateur a une connaissance précise de ce prix d'opportunité, alors il devient possible de calibrer les paramètres des fonctions de coût variable de production avec les équations (12) et les données observées pour l'année de référence. Pourvu que ce prix d'opportunité soit strictement inférieur à la recette brute par hectare de la culture marginale, cette solution permet de calibrer tous les coûts marginaux strictement positifs pour toutes les cultures. Par exemple, si un prix d'opportunité de la terre de 4000 francs/ha est choisi, alors les paramètres des fonctions de coût variable de production prennent les valeurs suivantes :

$$b_b = 45{,}130,\ b_m = 98{,}493 \text{ et } b_p = 184{,}323.$$

Par rapport à la première solution présentée ci-dessus, celle-ci a le mérite d'éviter les problèmes des rendements d'échelle constants. Néanmoins, cette solution peut être adoptée uniquement lorsque le prix d'opportunité de la terre est connu, ce qui soulève là encore une certaine difficulté. Si l'exploitation considérée n'est pas propriétaire de toute sa surface, le prix de location des terres peut être utilisé en première approximation. Cependant, comme les modèles de PMP sont developpés dans un cadre de court terme avec des rigidités factorielles, un tel choix pose question. La détermination du prix d'opportunité de la terre est encore plus difficile lorsque l'exploitant est propriétaire de l'ensemble de ces terres.

L'utilisation du coût total de production

La solution que nous proposons consiste à utiliser toute l'information disponible pour le modélisateur dans le RICA. L'information non utilisée jusqu'à présent est celle donnée par le coût total de production CT. Les paramètres des fonctions de coût variable de production vérifient l'équation suivante :

$$CT = \sum_{i=b,m,p} b_i l_i^{o\,2} \tag{13}$$

Il n'est cependant pas possible de calibrer de manière séquentielle les paramètres des fonctions de coût variable de production, *i.e.* utiliser en premier lieu l'équation (9) pour calibrer deux paramètres, puis cette équation (13) pour calibrer le dernier. En effet, si l'équation (9) est utilisée, cela implique nécessairement que le prix d'opportunité de la terre est égal à la recette brute de la culture marginale et par conséquent que le coût marginal de production de celle-ci est nul. Remarquons plutôt que la première étape de la procédure de calibrage fournit des informations sur les niveaux relatifs des coûts marginaux de production et non des informations sur les niveaux absolus de ceux-ci. En d'autres termes, cette première étape procure une hiérarchie des coûts marginaux de production. Dans l'exemple choisi ici, cela signifie que la première étape apporte véritablement deux informations : la différence entre les coûts marginaux de production de blé tendre et de maïs grain, d'une part (équation 14), la différence entre les coûts marginaux de production de pois protéagineux et de maïs grain, d'autre part (équation 15).

$$\lambda_b - \lambda_m = 2b_b l_b^o - 2b_m l_m^o \tag{14}$$

$$\lambda_p - \lambda_m = 2b_p l_p^o - 2b_m l_m^o \tag{15}$$

La résolution du système formé des équations (13), (14) et (15) conduit à la solution suivante :

$$b_b = 50{,}150 \text{, } b_m = 109{,}822 \text{ et } b_p = 205{,}411.$$

Il est dans ce cas possible de déduire le prix d'opportunité de la terre pour l'année de référence. Il s'élève à 3 362 francs par hectare. Cette solution pour calibrer les paramètres des fonctions de coût variable de production des différentes cultures est intéressante car elle s'appuie uniquement sur des données observées et elle n'impose pas de rendements d'échelle constants pour toutes les cultures.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons tout d'abord présenté les principes et la mise en œuvre classique de la méthode PMP. Les principales originalités de cette méthode sont son aptitude à reproduire automatiquement la situation observée initialement et à s'astreindre des comportements discontinus obtenus par la PML. Cette méthode dépasse donc la PML qui est généralement confrontée au compromis entre reproduction de la situation initiale et « flexibilité » du modèle. Les principes de cette méthode reposent sur trois idées. La première est la traduction dans la fonction objectif des contraintes techniques auxquelles fait face le producteur et qui sont difficiles à exprimer par le modélisateur (contrainte de main-d'œuvre par exemple). La deuxième idée est de considérer que les données observées correspondent à un optimum du producteur. Ceci justifie le fait que les données observées servent au calibrage des paramètres introduits dans le modèle. La troisième idée de la PMP réside dans l'introduction de la non-linéarité dans la fonction objectif via une fonction de coût de production et/ou une fonction de rendements à l'hectare. Ceci assure alors un comportement « lisse » du modèle.

Bien que ces principes soient relativement simples, leur mise en œuvre est délicate et peut induire des problèmes importants. Celui qui est abordé dans le cadre de cet article a trait au calibrage des paramètres de comportement qui, dans sa forme standard, conduit à la nullité du coût de production de la culture marginale. Les deux solutions rencontrées dans la littérature résolvent effectivement ce problème mais en créent d'autres par ailleurs. L'introduction d'informations sur les coûts variables par culture pose en premier lieu la question de l'origine de ces informations et en second lieu le problème des rendements d'échelle constants. L'introduction d'information sur le prix d'opportunité de la terre pose également le problème de la mesure de ce prix. La solution suggérée dans cet article, qui consiste à utiliser toute l'information disponible dans le RICA, ne souffre pas de telles difficultés.

L'attention portée dans cet article aux problèmes de calibrage ne doit pas occulter pour autant les nombreuses autres limites de cette approche. Le manque de validation empirique des résultats obtenus avec cette approche est une faiblesse majeure. Mais cette critique s'applique de la même façon à tous les modèles calibrés sur une année de référence. Des efforts doivent alors être entrepris dans cette voie pour améliorer la pertinence de cette méthodologie comme outil d'analyse en économie de production agricole.

BIBLIOGRAPHIE

ARFINI (F.), 1996 — The effects of CAP Reform on two Italian regions: a positive mathematical programming application, *in*: *What Future for the CAP? Perspectives and Expectations for the Common Agricultural Policy of the European Union*, Ottone Ferro (ed.), pp. 103-109.

ARFINI (F.), PARIS (Q.), 1995 — A positive mathematical programming model for regional analysis of agricultural policies, Proceedings of the 40th Seminar of the European Association of Agricultural Economists, Ancona, Italy, pp. 17-35.

BARKAOUI (A.), BUTAULT (J.-P.), 1998 — Modélisation de l'agriculture meusienne et Paquet Santer, *Economie Rurale*, 248, p. 13-20.

BARKAOUI (A.), BUTAULT (J.-P.), 1999 — Positive mathematical programming and cereals and oilseeds supply within EU under Agenda 2000, Paper presented at the IX European Congress of Agricultural Economists, Varsaw, August 24-28 1999.

BAUER (S.) et KASNAKOGLU (H.), 1990 — Non linear programming models for sector policy analysis, *Economic Modelling*, pp. 275-290.

BOUSSARD (J.-M.), BOUSSEMART (J.-P.), FLICHMAN (G.), JACQUET (F.) et LEFER (H.-B.), 1997 — Les effets de la réforme de la PAC sur les exploitations de grandes cultures, *Economie Rurale*, pp. 20-29.

BRITZ (W.) et HECKELEI (T.), 1997 — Pre-study for a medium-term simulation and forecast model of the agricultural sector for EU, CAPRI Working Papers, 97-01.

CARLES (R.), DECOUVELAERE (F.-X.), MILLET (G.), REVEL (A.), SOURIE (J.-C.), 1998 — Nouveaux outils pour analyser les effets de la prochaine réforme de la PAC sur les exploitations agricoles, *Economie Rurale*, 243, pp. 56-63.

GARVEY (E) et STEELE (C.), 1998 — Short term forecast of structural changes in Irish agriculture, CAPRI Working Paper, 98-07.

GUYOMARD (H.), BAUDRY (M.) et CARPENTIER (A.), 1996 — Estimation crop supply response in the presence of farm programmes: application to the CAP, *European Review of Agricultural Economics*, pp. 401-420.

HAZELL (P. B. R.), NORTON (R. D.), 1986 — *Mathematical Programming for Economic Analysis in Agriculture*, New York, Macmillan.

HEADY (E. O.), 1954 — Simplified presentation and logical aspects of linear programming technique, *Journal of Farm Economics*, 24, pp. 1035-1048.

HECKELEI (T.), 1997 — Positive mathematical programming: Review of the standard approach, CAPRI Working Paper, 97-03.

HECKELEI (T.), BRITZ (W.), 1999 — Therapies for Ill-posed problems in sectoral programming models, Paper presented at the IX European Congress of Agricultural Economists, Varsaw, August 24-28 1999.

HOWITT (R. E.), 1995a — Positive mathematical programming, *American Journal of Agricultural Economics*, 77, pp. 329-342.

HOWITT (R. E.), 1995b — Calibration methods for agricultural economic production models, *Journal of Agricultural Economic*, 46, pp. 147-159.

JUDEZ (L.), CHAYA (C.), MARTINEZ (S.) and GONZALEZ (A. A.), 1999 — Effects of the measures envisaged in « Agenda 2000 » on arable crops producers, beef and veal producers and dairy farms, Paper presented at the IX European Congress of Agricultural Economists, Varsaw, August 24-28 1999.

JUDEZ (L.), MARTINEZ (S.) and FUENTES-PILA (J.), 1998 — Positive Mathematical Programming Revisited, Working Paper, Universidad Politecnica de Madrid.

JUST (R. E.), ZILBERMAN (D.) and HOCHMAN (E.), 1983 — Estimation of a multicrop production functions, *American Journal of Agricultural Economics*, 61, pp. 770-780.

KING (R. A.), 1953 — Some applications of activity analysis in agricultural economics, *Journal of Farm Economics*, 25, pp. 823-833.

LECLAIRE (C.), 1997 — Scénarios des effets de la réforme de l'OCM lait dans la Meuse. Modélisation par la programmation mathématique, Mémoire de DAA, ENSA Rennes.

MCCARL (B. A.), 1982 — Cropping activities in agricultural sector models: a methodological proposal, *American Journal of Agricultural Economics*, 64, pp. 768-771.

PARIS (Q.) et HOWITT (R. E.), 1998 — An analysis of Ill-posed production problems using maximum entropy, *American Journal of Agricultural Economics*, 80, pp. 124-138.

RHÖM (O.), SINABELL (F.), DABBERT (S.), HOFREITHER (M. F.), 1997 — The method of « positive mathematical programming » to evaluate farm and market effects of countryside stewarship policies, Working paper, Department of Farm Economics, University of Hohenheim, 18 pages.

ANNEXE 1

Description de l'exploitation de grandes cultures

Cette exploitation de grandes cultures, appartenant à l'OTEX 11, a produit en 1997 trois cultures : du blé tendre ($i = b$), du maïs grain ($i = m$) et des pois protéagineux ($i = p$). Elle a gelé une partie de ses terres. Par souci de simplification, le gel n'est pas intégré dans la présentation de la mise en œuvre de la PMP. Les données relatives aux trois cultures produites sont les suivantes :

	Blé tendre	Maïs grain	Pois protéagineux
Surface (ha)	63,65	28,20	15,15
Production (q)	5174,70	2989,20	1045,40
Rendement (q/ha)	81,30	106,00	69,00
Valeur de la production (KF)	477,62	206,25	96,17
Prix (F/q)	92,30	69,00	92,00
Aides directes (F/ha)	2241	2241	3237

Les données sur les coûts de production (en KF) sont les suivantes :

Semences	53,98
Engrais	147,22
Produits phytosanitaires	86,32
Fournitures diverses	0,76
Travaux pour cultures	49,37
Coût total de production	337,65