



AgEcon SEARCH
RESEARCH IN AGRICULTURAL & APPLIED ECONOMICS

The World's Largest Open Access Agricultural & Applied Economics Digital Library

This document is discoverable and free to researchers across the globe due to the work of AgEcon Search.

Help ensure our sustainability.

Give to AgEcon Search

AgEcon Search
<http://ageconsearch.umn.edu>
aesearch@umn.edu

*Papers downloaded from **AgEcon Search** may be used for non-commercial purposes and personal study only. No other use, including posting to another Internet site, is permitted without permission from the copyright owner (not AgEcon Search), or as allowed under the provisions of Fair Use, U.S. Copyright Act, Title 17 U.S.C.*

Faut-il réguler l'encombrement des sites récréatifs ? Un modèle de choix discret avec participation

Mélody LEPLAT*, Philippe LE GOFFE**

* Auteur correspondant : Agrocampus Ouest, UMR 1302 SMART, 4 allée Adolphe Bobierre - CS 61103, F-35011 Rennes cedex

e-mail : melody.leplat@agrocampus-ouest.fr

** INRA, UMR 1302 SMART, F-35000 Rennes

Résumé – En France, les sites récréatifs sont généralement en accès libre, ce qui explique qu'ils sont souvent encombrés, notamment quand ils sont attractifs et proches des zones peuplées. La théorie prévoit que l'équilibre de fréquentation est alors non optimal en raison d'un effet externe d'encombrement. Alors que des travaux anciens ont caractérisé l'équilibre et l'optimum dans le cadre de modèles mono-site à demande continue (Fisher et Krutilla, 1972), les rares articles récents utilisant les modèles de choix discret se sont limités à étudier empiriquement l'équilibre et la répartition des visites entre les sites. Notre modèle théorique permet de formaliser l'équilibre et l'optimum de fréquentation, dans le cadre d'un modèle de choix discret à deux sites intégrant la décision de participation des individus, ainsi que certains instruments de gestion permettant d'améliorer le bien-être. Il a été nécessaire de recourir à une formulation générale du bien-être définie par Erlander (2005). On montre que les individus participent trop et visitent trop le site de meilleure qualité (et pas assez le site de qualité inférieure) à l'équilibre. En exprimant les désutilités collectives liées à la participation et à la mauvaise répartition des visites entre les sites, le modèle permet d'en déduire les taxes optimales et les effets sur le bien-être collectif d'une augmentation de la qualité des sites. Une illustration simplifiée est proposée à partir d'un modèle logit multinomial estimé sur des données de pêche récréative.

Mots-clés : congestion endogène, optimum, équilibre, modèle de choix discret, méthode des coûts de déplacement, demande récréative

Is it necessary to regulate crowding on recreation sites? A Random Utility Model with participation

Summary – Open-access is probably the main cause of crowding on recreational sites, especially when they are attractive and close to urban areas. In this case, theory predicts equilibrium and optimum differ due to externality of congestion. Whereas Fisher and Krutilla (1972) characterized optimum and equilibrium in monosite models, recent works on congestion in multiple sites models (Random Utility Models) only study equilibrium and the repartition of visits between sites in an empirical way. Our theoretical framework allows us to go further and derive visitation equilibrium and visitation optimum in a two sites Random Utility Model with participation. Sites differ by quality. We use a recent measure of welfare (Erlander, 2005), essential to calculate optimum. At equilibrium, we show that participation is too high and that the high quality site is too much visited. We introduce optimal taxes to resolve this issue. Because this solution does not appear very realistic in the French case, we also examine impacts of improvements of quality on welfare. An illustration is finally proposed with a multinomial logit model estimated with data on recreational fishing.

Keywords: endogenous congestion, optimum, equilibrium, Random Utility Model, recreation demand

Descripteurs JEL : Q26, Q51

1. Introduction

Connaître et comprendre la fréquentation des sites naturels est une préoccupation croissante des gestionnaires de ces espaces fragiles. La plupart des réseaux d'espaces protégés – qu'il s'agisse de parcs nationaux ou régionaux, de réserves naturelles, de l'Office national des forêts ou du Conservatoire du littoral et des rivages lacustres – mettent en place des instruments de suivi quantitatifs ou qualitatifs de la fréquentation. Depuis 1983, le Conservatoire du littoral a lancé trois études globales pour mieux connaître les visiteurs de ses sites¹. Dès 1996, lors d'un de ses ateliers, il se posait la question du caractère protecteur ou, au contraire, prédateur du public. La régulation de la fréquentation était encore essentiellement basée sur la notion de capacité de charge². Depuis quelques années, les gestionnaires des sites lui préfèrent celle de capacité d'accueil qui, comme le souligne Petit (2006), intègre non seulement « *la maîtrise des flux, la protection du patrimoine, (mais aussi) l'amélioration de la qualité de la visite* ». La qualité de la visite, et notamment l'impact de la fréquentation sur le bien-être des visiteurs, devient ainsi un axe de réflexion des politiques de régulation.

Or, en France, l'accès aux sites naturels supports d'activités récréatives est généralement libre, ce qui conduit à des situations de sur-fréquentation qui s'apparentent à la « tragédie des communs » décrite par Hardin (1968) pour les ressources naturelles. Le visiteur ne tient pas compte de l'effet externe d'encombrement (dit de congestion) qu'il fait subir aux autres visiteurs. Cet effet est généralement considéré comme négatif, mais on peut aussi concevoir qu'il soit positif, pour certains individus ou pour certains niveaux faibles de congestion. L'équilibre de fréquentation est alors différent de l'optimum en raison de cet effet externe de congestion.

Dans les années 70, plusieurs auteurs ont formalisé ce problème dans le cadre de la méthode des coûts de déplacement, c'est-à-dire en considérant une fonction de demande de visites continue adressée à un seul site (Fisher et Krutilla, 1972 ; Anderson et Bonsor, 1974 ; Anderson, 1980). Dans ces modèles, la demande individuelle (et aussi globale) dépend négativement de la fréquentation globale, qui est donc endogène. La fréquentation en accès libre, qui annule le consentement à payer marginal (équilibre concurrentiel), est supérieure à la fréquentation optimale, qui maximise le bien-être. Sibly (2001) enrichit ce modèle classique en indexant également la demande sur la qualité du site. Il montre qu'il faut investir moins dans la qualité à l'équilibre qu'à l'optimum, car le coût marginal de l'amélioration de la qualité à l'équilibre est augmenté du coût externe marginal de congestion. Peu d'études ont appliqué ce cadre théorique pour identifier le niveau optimal de fréquentation d'un site récréatif. On peut citer Cicchetti et Smith (1973) qui calculent les optima de fréquentation journaliers pour un site de randonnée dans le Montana, et McConnell (1977) qui conduit le même type d'analyse sur les plages de Rhodes Island.

Dans les années 90, les applications de la méthode des coûts de déplacement ont abandonné les modèles continus au profit des modèles de choix discret (RUM³), qui

¹ Enquête Louis Harris (1983), enquête SOFRES (1991), enquête SORGEM (1994)

² Fréquentation maximale que le milieu naturel peut supporter de manière durable.

³ *Random Utility Model*

permettent d'analyser la substitution entre les différents sites visités. La prise en compte de la congestion dans les RUM a fait l'objet de peu de travaux de modélisation. Dans un modèle simple, Boxall et Adamowicz (2000) et Boxall *et al.* (2005) ont été les premiers à faire l'hypothèse que la probabilité de visiter un site par un consommateur dépend de la somme des probabilités de visite des autres individus à ce même site. La maximisation individuelle de l'utilité par les consommateurs aboutit alors à un équilibre de Nash, caractérisé par les choix de sites et les niveaux de congestion. Cette congestion d'équilibre n'est pas déterminée dans la partie empirique de ces travaux, car les auteurs utilisent un indicateur de congestion anticipée, expliqué par les caractéristiques des sites et des individus.

Timmins et Murdock (2007) ont formalisé plus complètement l'équilibre de Nash à congestion endogène, dans lequel la décision de participer n'est pas modélisée (les individus visitent systématiquement un site). La proportion des visiteurs fréquentant chaque site est utilisée comme indicateur de congestion endogène, dans une estimation faisant appel à une approche par variables instrumentales (une méthode similaire mais simplifiée est utilisée par Hindsley *et al.*, 2008). Ignorer l'endogénéité de la congestion conduit à sous-estimer fortement la valeur d'un site, car on ne prend pas en compte le fait que l'existence d'un site réduit la congestion aux autres sites de l'espace de choix. En revanche, cela conduit à des erreurs d'estimation non systématiques sur l'estimation des bénéfices d'une amélioration de qualité: sous-estimation chez Timmins et Murdock (2007) et sous-estimation ou surestimation chez Hindsley *et al.* (2008).

Notre modèle a pour but de transposer l'analyse de Fisher et Krutilla (1972) à un modèle multi-sites. Il s'agit donc, dans un premier temps, de formaliser l'équilibre et l'optimum de fréquentation dans le cadre des RUM, les travaux précédents sur la congestion endogène dans les modèles de choix discret s'étant bornés à l'étude de l'équilibre. Dans un deuxième temps, on s'intéresse aux politiques publiques de régulation. Deux pistes sont examinées :

- maîtriser la congestion par l'instauration de taxes. Cependant, si cet instrument est intéressant d'un point de vue théorique, il est difficile à mettre en place dans des espaces ouverts comme les sites naturels ;
- augmenter la qualité d'un site. Du point de vue du bien-être global : vaut-il mieux améliorer la qualité d'un site phare, comme ce qui est fait dans les « Opérations grands sites »⁴ ou essayer d'équilibrer la qualité entre les sites naturels ?

Notre travail comporte deux dimensions, qui à notre connaissance ne figurent pas dans la littérature. Premièrement, étant donné que l'effet externe de congestion dépend probablement plus du niveau global de fréquentation que de la répartition des visites entre les sites, il nous a semblé fondamental de modéliser la décision de participer préalablement au choix des sites. Dans les travaux de Timmins et Murdock (2007) et Hindsley *et al.* (2008), le niveau global de fréquentation est constant et une variation de qualité sur un site se traduit uniquement par une nouvelle répartition des visiteurs

⁴ Projets ambitieux de réhabilitation des sites classés les plus emblématiques et les plus fréquentés, menés par l'Etat en partenariat avec les collectivités locales et les gestionnaires des sites.

entre les sites. Nous utilisons un modèle de choix discret répété pour corriger cette faiblesse. Deuxièmement, par analogie avec les travaux sur les modèles mono-site, on a cherché à comparer les probabilités de participer et de visiter les sites à l'équilibre et à l'optimum. La recherche des probabilités optimales a nécessité de recourir à une méthode générale de calcul du bien-être dans le cas des modèles logit, méthode développée par Erlander (2005) et qui n'avait pas été appliquée auparavant à notre contexte. En effet, la méthode traditionnellement utilisée est seulement applicable dans le cas où les probabilités résultent de la maximisation individuelle de l'utilité, c'est-à-dire à l'équilibre.

Nous proposons un modèle logit à deux sites où les consommateurs ont des préférences identiques. L'utilité de la visite à un site dépend de la qualité du site et de la congestion, appréciée par la somme des probabilités de visite à ce site des différents consommateurs. Les deux sites ont la même capacité de charge et diffèrent uniquement par leur qualité. Il s'agit de voir si la différence de probabilité de visite entre l'équilibre et l'optimum dépend de la qualité des sites. L'effet de l'amélioration de la qualité des sites sur la participation, la répartition entre les sites et le bien-être collectif est également une question intéressante, qui peut être abordée à l'aide de ce modèle.

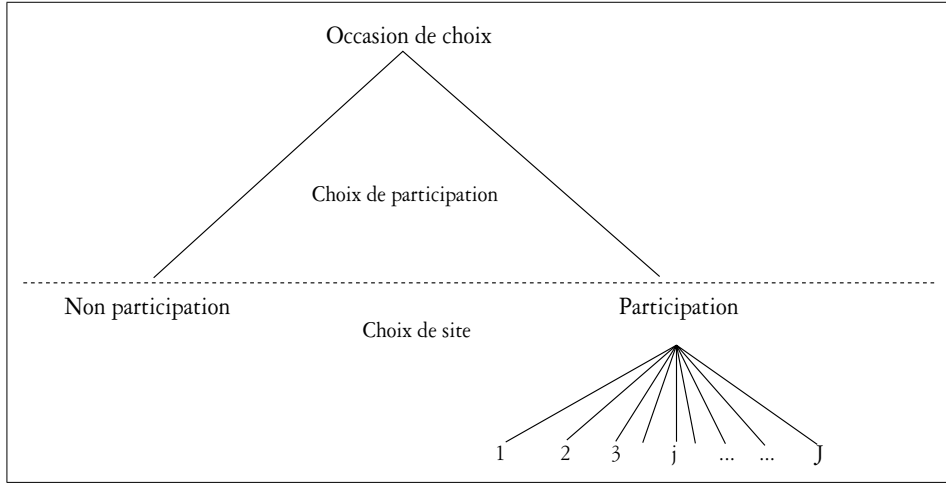
La première section du papier est consacrée à la construction du modèle. Puis, on définit l'équilibre de Nash : l'individu maximise son utilité en prenant en compte les probabilités de participation et de visites des autres visiteurs. On s'intéresse ensuite au calcul des probabilités optimales, obtenues par la maximisation du bien-être exprimé par la formule d'Erlander (2005). Pour augmenter le bien-être, deux politiques de gestion de l'encombrement sont envisagées : la taxation optimale et l'amélioration de la qualité. Le modèle est finalement illustré dans une application restrictive à la pêche récréative où la participation n'intervient pas. On retrouve cependant quelques-uns de nos résultats théoriques.

2. Les hypothèses du modèle théorique

2.1. Le modèle de choix discret répété

Les modèles de choix discret les plus couramment utilisés dans les articles sur la fréquentation des sites naturels sont les modèles multinomiaux logit et les modèles hiérarchisés. Ils modélisent le choix d'un site récréatif par un individu lors d'une occasion de choix. Dans les modèles hiérarchisés, le choix est décomposé en plusieurs nœuds de décision qui constituent l'arborescence du modèle. Dans ces modèles, la visite d'un site est systématique, le choix de non-participation étant absent de l'espace de choix. Or la participation est fondamentale pour l'étude des effets d'encombrement car, d'une part, elle contribue à cet encombrement et, d'autre part, l'encombrement et les politiques qui le régulent influencent la décision de participer à une visite récréative. Nous avons donc choisi de recourir au modèle de choix discret répété, développé par Morey *et al.* (1993) qui modélisent le choix de participer ou non à une visite récréative en amont du choix du site visité (figure 1).

Figure 1. Architecture du modèle



Il s'agit d'un modèle hiérarchisé dégénéré puisque la branche de non-participation n'a qu'une seule alternative. En choisissant l'alternative $j = 0, 1, 2, \dots, J$, ($j = 0$ représentant le choix de ne pas participer), l'individu $i = 1, 2, \dots, n$ obtient l'utilité V_{ij} :

$$V_{ij} = U_{ij}(X_j, Z_i, TC_{ij}, C_{ij}) + \varepsilon_{ij}$$

$$U_{ij} = U_{i0} + \Gamma_i(X_j) + \Phi_i(Z_i) + \delta_i TC_{ij} + \alpha_i C_{ij} + \theta_i \times Z_i \times C_{ij}$$

avec : U_{i0} , l'utilité de non-participation ; X_j , le vecteur des attributs du site j ; Z_i , le vecteur des caractéristiques de l'individu i ; TC_{ij} , le coût de déplacement de l'individu i au site j ; C_{ij} , la congestion au site j anticipée par l'individu i ; Γ_i et Φ_i , des fonctions définies par individu.

L'utilité V_{ij} comporte une partie déterministe U_{ij} , qui dépend des attributs des sites dont la congestion et des caractéristiques individuelles. Dans un premier temps, on suppose que l'effet de la congestion sur l'utilité varie selon les caractéristiques individuelles, c'est-à-dire que les préférences des individus pour la congestion sont différentes. Le terme d'erreur ε_{ij} capture l'effet des variables non observées, qu'il s'agisse de caractéristiques individuelles de sites ou d'individus.

L'individu i choisit le site k si V_{ik} est supérieure à V_{ij} quel que soit k . La probabilité que l'individu i choisisse le site k s'écrit :

$$p(V_{ik} \geq V_{ij}) = p(\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ij} \geq U_{ij} - U_{ik}) \quad (1)$$

La forme de cette probabilité dépend de la distribution des aléas ε_{ij} . Dans les RUM, on fait l'hypothèse que les aléas sont indépendants et identiquement distribués (iid) selon une loi de Weibull. Cette hypothèse entraîne la propriété d'indépendance des états non pertinents (*independence of irrelevant alternatives* : IIA) qui implique que le rapport des probabilités entre deux alternatives est indépendant des autres alternatives. Cette propriété est appropriée si les alternatives sont toutes similaires (ou toutes

différentes), mais elle devient trop restrictive quand il existe différents degrés de similarité entre les alternatives. Il convient alors de regrouper les alternatives par « proximité », d'où l'estimation de modèles *nested*. Cette similarité des alternatives est mesurée par ρ , le coefficient de dissimilarité⁵. On fait l'hypothèse que les alternatives de choix de sites sont différentes de celle de non-participation, d'où l'introduction d'un unique coefficient ρ qui mesure la similarité des sites.

Sous l'hypothèse que les aléas sont iid, selon une loi de Weibull, et en posant p_{iG} , la probabilité pour l'individu i de participer et $p_{ij|G}$ celle de visiter le site j sachant qu'il a choisi de participer, la probabilité de visiter un site récréatif j pour l'individu i dans un modèle répété est définie par :

$$p_{ij} = p_{ij|G} \times p_{iG} \quad (2)$$

$$\text{avec } p_{ij|G} = \frac{e^{U_{ij}/\rho}}{\sum_k e^{U_{ik}/\rho}} \quad (3)$$

$$p_{iG} = \frac{e^{U_{iG}}}{e^{U_{iG}} + e^{U_{i0}}} \quad (4)$$

où : $U_{iG} = \rho I_{iG}$, avec : $I_{iG} = \ln \sum_j e^{U_{ij}}$, la valeur inclusive, c'est-à-dire l'utilité maximale espérée de la visite aux différents sites récréatifs j et ρ , le coefficient de dissimilarité.

Un des objectifs de ce travail est de calculer les fréquentations optimales des sites récréatifs en présence d'une externalité de congestion. Dans cette perspective, une définition spécifique de la congestion est nécessaire.

2.2. Externalité de congestion

On suppose que les individus anticipent rationnellement les comportements de participation et de visites des autres individus. Sous cette hypothèse, le vecteur des niveaux de congestion anticipée aux différents sites est le même pour tous les individus et égal au vecteur des espérances de congestion. On reprend ici la mesure de la congestion anticipée de Timmins et Murdock (2007) et Boxall et Adamowicz (2000) où celle-ci est définie comme l'espérance de la congestion, c'est-à-dire comme la somme des probabilités de visiter un site par tous les individus.

$$C_j = \sum_i p_{ij} = \sum_i p_{ij|G} \cdot p_{iG} \quad (5)$$

Pour s'assurer de l'unicité de l'équilibre, la congestion est introduite de manière linéaire dans l'utilité et est supposée la diminuer : $\alpha_i < 0$ (Bayer et Timmins, 2005). L'introduction de l'externalité de congestion implique que le comportement des individus à l'équilibre n'est plus optimal.

⁵ Il existe un coefficient de dissimilarité par groupe d'alternatives. Le cas où $\rho = 1$ correspond à des alternatives différentes et le modèle se simplifie en un modèle multinomial logit ; si ρ est compris entre 0 et 1, alors la structure hiérarchisée du modèle convient au cas étudié tandis qu'un coefficient supérieur à 1 révèle une mauvaise spécification du modèle : la structure d'emboîtement n'est pas adaptée et doit être modifiée.

2.3. Définition du bien-être

Le bien-être individuel W_i dans un modèle de choix discret est traditionnellement défini comme « l'utilité maximale espérée » (*expected maximum utility*) :

$$W_i = \int_{\epsilon_{i1}=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{\epsilon_{ij}=-\infty}^{+\infty} \max(U_{i1} + \epsilon_{i1}, \dots, U_{ij} + \epsilon_{ij}) f(\epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{ij}) d\epsilon_{ij} \dots d\epsilon_{i1} \quad (6)$$

(Morey, 1999).

Sous l'hypothèse où les individus choisissent le site qui leur procure la plus grande utilité et où les aléas ϵ_{ij} sont indépendants et identiquement distribués (iid) selon une loi de Weibull, Small et Rosen (1981) ont montré que le bien-être pouvait se simplifier selon l'expression :

$$W_i = \ln \left(\sum_j e^{U_{ij}} \right) \quad (7)$$

La formule de Small et Rosen est valable dans le seul cas où les probabilités de participer et de visiter un site sont définies selon la distribution logit (équations 3 et 4), issue d'une hypothèse de maximisation individuelle de l'utilité. Elle est donc adaptée au calcul du bien-être à l'équilibre, mais ne convient plus pour à l'optimum, où le bien-être est maximisé collectivement dans une logique de coopération. On a donc cherché une formulation plus générale du bien-être, mais aussi plus facile à manipuler que l'équation 6. Erlander a développé en 2005 une mesure du bien-être qui prend en compte l'espérance d'utilité de l'individu, ainsi que l'étendue du choix qui lui est proposée, représentée par l'entropie :

$$W_i = \sum_j p_{ij} U_{ij} + H(p_{ij}) \quad (8)$$

$$\text{avec } H(p_{ij}) = - \sum_j p_{ij} \ln p_{ij}, \quad \text{l'entropie (9)}$$

Cette formule du bien-être est définie quelle que soit la distribution de probabilités. Elle est en particulier utilisable quand les probabilités suivent la distribution logit, ce qui implique qu'elle donne, à l'équilibre, une mesure identique à celle de Small et Rosen (*cf.* annexe A.1). Cependant, comme elle est utilisable quelle que soit la distribution de probabilités, c'est elle qu'il faut utiliser pour caractériser les probabilités optimales qui ne suivent pas la distribution logit, puisqu'elles sont déterminées par le planificateur public.

Dans le cadre du modèle logit répété, la formulation « classique » du bien-être est également issue de Small et Rosen (1981) :

$$\begin{aligned} W_i &= \ln(e^{U_{i0}} + e^{U_{iG}}) \\ \text{avec } U_{iG} &= \rho I_{iG} \\ \text{et } I_{iG} &= \ln \left(\sum_j e^{U_{ij}/\rho} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Cependant, de la même manière que dans le modèle multinomial logit, cette formule n'est pas adaptée au calcul de l'optimum dans le modèle logit répété. Erlander (2005) a explicitement défini sa formule du bien-être seulement pour un modèle multinomial classique, mais il précise qu'elle peut être étendue aux modèles hiérarchisés, dont le modèle répété est un cas particulier. La valeur inclusive, correspondant à « l'utilité maximale espérée de la participation », doit être également calculée en utilisant la formule d'Erlander (2005).

On obtient après calcul (le détail de la démonstration est disponible en annexe A.2), la formule suivante pour un modèle logit avec participation :

$$W_i = (1 - p_{iG})U_{i0} + p_{iG}U_{iG} - (1 - p_{iG})\ln(1 - p_{iG}) - p_{iG}\ln(p_{iG}) \quad (11)$$

avec $U_{iG} = E[U_{ij|G}] + \rho H(p_{ij|G})$

et $H(p_{ij|G}) = -\sum_k (p_{ij|G})\ln(p_{ij|G})$, l'entropie.

A notre connaissance, cette mesure du bien-être n'a pas encore été utilisée dans les travaux sur la congestion utilisant les modèles de choix discret. Pour des raisons de commodité liées au calcul des dérivées, on utilisera la mesure de Small et Rosen (1981) pour le calcul de l'équilibre, et celle d'Erlander (2005) pour celui de l'optimum. A l'équilibre, les deux mesures sont strictement identiques (cf. démonstrations en annexe A).

2.4. Hypothèses simplificatrices

2.4.1. Homogénéité des individus

On suppose que tous les individus sont homogènes de sorte que ni l'utilité, ni les paramètres, ni les fonctions ne dépendent plus des caractéristiques individuelles Z_i :

- $\Gamma_i = \Gamma$;
- $\delta_i = \delta$;
- $TC_{ij} = TC_j$;
- $\alpha_i = \alpha$;
- $C_i = \sum_j p_{ij|G} \cdot p_{iG} = \alpha p_{j|G} \cdot p_G$.

L'utilité devient :

$$U_j = U_0 + \Gamma(X_j) + \delta TC_j + \alpha p_{j|G} \cdot p_G \quad (12)$$

On définit ensuite une mesure composite de la qualité β_j qui intègre l'ensemble des attributs du site j et notamment le coût du déplacement (qui devient une caractéristique du site sous l'hypothèse d'homogénéité des individus). L'utilité dépend alors exclusivement d'une fonction de la qualité $f(\beta_j)$ (avec $f' > 0$ et $f'' \leq 0$) et de la congestion au site j , C_j :

$$U_j = U_0 + f(\beta_j) + \alpha p_{j|G} \cdot p_G$$

2.4.2. Passage à deux sites

Les développements suivants de notre modèle sont tout à fait envisageables avec j sites. Cependant, le modèle deviendrait peu lisible et les effets externes difficilement interprétables. Nous avons donc choisi de restreindre notre modèle à deux sites ($j = 2$) qui diffèrent par leur qualité ($\beta_1 \geq \beta_2$) afin de faciliter la présentation et la compréhension du modèle.

On pose $p_{1|G}$, la probabilité de visiter le site de qualité haute (β_1) sachant que l'individu a choisi de participer et $p_{2|G} = 1 - p_{1|G}$, on a alors :

$$U_1 = U_0 + f(\beta_1) + \alpha n p_{1|G} \cdot p_G$$

$$U_2 = U_0 + f(\beta_2) + \alpha n (1 - p_{1|G}) \cdot p_G$$

3. L'équilibre de Nash

Chaque visiteur choisit d'abord de participer ou non de façon à maximiser son utilité. Les individus choisissent ensuite le site qui leur procure la plus grande utilité. Dans ce processus de maximisation de l'utilité, le consommateur considère les probabilités de participer et de visiter les sites des autres individus comme des données. Dans notre cadre, les probabilités sont définies par :

$$p_G = \frac{1}{1 + e^{U_0 - U_G}}$$

$$p_{1|G} = \frac{1}{1 + e^{(U_2 - U_1)/\rho}}$$

$$\text{avec } U_G = \rho \ln(e^{U_1/\rho} + e^{U_2/\rho})$$

Comme l'ont suggéré Boxall *et al.* (2005) et Timmins et Murdock (2007), le choix de participer ainsi que le choix du site visité sont le résultat d'un équilibre de Nash. Les probabilités d'équilibre p_G^* et $p_{1|G}^*$ sont obtenues directement et correspondent aux deux points fixes du système suivant :

$$\begin{cases} p_{1|G}^* = \frac{1}{1 + e^{(U_2(p_{1|G}^*, p_G^*) - U_1(p_{1|G}^*, p_G^*))/\rho}} \\ p_G^* = \frac{1}{1 + e^{U_0 - U_G(p_{1|G}^*, p_G^*)}} \end{cases} \quad (13)$$

Il est maintenant intéressant de calculer les dérivées partielles du bien-être par rapport aux probabilités d'équilibre, afin de comparer les probabilités d'équilibre aux probabilités optimales qui, elles, vont annuler ces dérivées.

$$\frac{\partial W}{\partial p_G} = \frac{\left(\frac{\partial U_1}{\partial p_G} e^{U_1/\rho} + \frac{\partial U_2}{\partial p_G} e^{U_2/\rho} \right) (e^{U_1/\rho} + e^{U_2/\rho})^{\rho-1}}{e^{U_0} + (e^{U_1/\rho} + e^{U_2/\rho})^\rho} \quad (14)$$

$$\text{avec } \frac{\partial U_1}{\partial p_G} = \alpha n p_{1|G} < 0 \text{ et } \frac{\partial U_2}{\partial p_G} = \alpha n (1 - p_{1|G}) < 0$$

A l'équilibre, $\frac{\partial W}{\partial p_G} < 0$, une augmentation de la participation influe négativement sur le bien-être car elle augmente la congestion aux deux sites.

$$\frac{\partial W}{\partial p_{1|G}} = \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} \frac{(e^{U_1/\rho} - e^{U_2/\rho})(e^{U_1/\rho} + e^{U_2/\rho}) \rho^{-1}}{e^{U_0} + (e^{U_1/\rho} + e^{U_2/\rho}) \rho} < 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial W}{\partial p_{2|G}} = - \frac{\partial W}{\partial p_{1|G}} \quad (16)$$

Le signe de cette dérivée dépend de celui de $e^{U_1/\rho} - e^{U_2/\rho}$, ce qui revient à comparer U_1 et U_2 . Or on a $\frac{dU_j}{d\beta_j} > 0$ (voir la preuve en annexe B), donc $\beta_1 > \beta_2$ entraîne $U_1 > U_2$: le site de qualité haute est celui qui confère la plus grande utilité. On a donc $\frac{\partial W}{\partial p_{1|G}} < 0$: une augmentation de la probabilité conditionnelle de visiter le site de meilleure qualité dégrade le bien-être. L'effet est inversé quand on augmente la probabilité de visiter le site de qualité inférieure $\left(\frac{\partial W}{\partial p_{2|G}} > 0 \right)$.

4. L'optimum

Pour calculer l'optimum, nous exprimons le bien-être à l'aide de la formule d'Erlander (2005) (voir annexe A.2) :

$$W = (1 - p_G)U_0 + p_G U_G - (1 - p_G) \ln(1 - p_G) - p_G \ln(p_G)$$

avec

$$U_G = p_{1|G} U_1(p_{1|G}, p_G) + (1 - p_{1|G}) U_2(p_{1|G}, p_G) - \rho [p_{1|G} \ln p_{1|G} + (1 - p_{1|G}) \ln(1 - p_{1|G})]$$

Les individus étant homogènes, ce bien-être est un bien-être moyen. Sa maximisation par rapport aux probabilités est équivalente à celle du bien-être collectif ($W \times n$). Le programme du décideur public s'écrit alors :

$$\max_{p_{1|G}, p_G} W(p_{1|G}, p_G)$$

Ce qui conduit aux conditions nécessaires suivantes :

$$\frac{\partial W}{\partial p_{1|G}} = 0 \Leftrightarrow p_G \cdot \frac{\partial U_G}{\partial p_{1|G}} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial p_G} = 0 \Leftrightarrow U_G - U_0 + p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G} - \ln \frac{p_G}{1 - p_G} = 0$$

Après calcul (cf. annexe C), les probabilités optimales sont définies par :

$$\begin{cases} \hat{p}_{1|G}^0 = \frac{1}{1 + e^{\left[U_2(p_{1|G}, p_G) - U_1(p_{1|G}, p_G) - \left(p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}} \right) \right] / \rho}} \\ \hat{p}_G^0 = \frac{1}{1 + e^{\left[U_0 - U_G(\hat{p}_{1|G}^0, \hat{p}_G^0) - \hat{p}_G^0 \frac{\partial U_G}{\partial \hat{p}_G^0} \right]}} \end{cases} \quad (17)$$

Les dérivées secondes du bien-être par rapport aux probabilités sont négatives, condition nécessaire à l'existence d'un maximum.

Tableau 1. Récapitulatif des niveaux des probabilités

	Équilibre	Optimum
\hat{p}_G	$\frac{1}{1 + e^{U_0 - U_G(p_{1 G}, p_G)}}$	$\frac{1}{1 + e^{U_0 - U_G(\hat{p}_{1 G}, \hat{p}_G) - \hat{p}_G \frac{\partial U_G}{\partial \hat{p}_G}}}$
$\hat{p}_{1 G}$	$\frac{1}{1 + e^{(U_2(p_{1 G}, p_G) - U_1(p_{1 G}, p_G)) / \rho}}$	$\frac{1}{1 + e^{\left[U_2(p_{1 G}, p_G) - U_1(p_{1 G}, p_G) - \left(p_{1 G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1 G}} + (1 - p_{1 G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1 G}} \right) \right] / \rho}}$

A l'équilibre, l'individu participe ou visite d'autant plus que la différence des utilités des alternatives qui lui sont proposées est importante. A l'optimum, le gain d'utilité procuré par la participation ou par la visite au site 1 est diminué d'un terme qui peut s'interpréter comme la désutilité par visite imposée par le décideur public. Ces désutilités, notées E_G et $E_{1|G}$, sont égales aux espérances des désutilités externes infligées à tous les consommateurs, y compris lui-même, du fait d'une participation supplémentaire ou d'une visite au site 1 supplémentaire (la preuve dans le cas de la participation est disponible en annexe D).

$$\begin{aligned} E_G &= p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G} \\ &= p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G} + (1 - p_G) \frac{\partial U_0}{\partial p_G} \\ E_{1|G} &= p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}} \end{aligned}$$

On a vu précédemment que les dérivées partielles du bien-être par rapport aux probabilités d'équilibre étaient négatives (équations 14 et 15). Cela implique que les probabilités d'équilibre sont plus élevées que les probabilités optimales car l'optimum est un maximum du bien-être. À l'équilibre, les individus participent trop car ils ne prennent pas en compte la désutilité externe E_G qu'ils imposent à la collectivité. De la

même façon, à l'équilibre, les individus visitent trop le site de meilleure qualité alors qu'au contraire, celui de qualité basse n'est pas assez visité, car la désutilité $E_{j|G}$ n'est pas intégrée dans leur comportement de visite.

Ces désutilités externes sont liées à l'interdépendance des utilités individuelles via la congestion. Si la congestion n'influe pas sur l'utilité ($\alpha = 0$), ces désutilités disparaissent car on a alors :

$$\frac{\partial U_G}{\partial p_G} = 0$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} = 0$$

Quand le comportement de participation et de visite des sites d'un individu n'a pas d'influence sur l'utilité des autres individus : le premier théorème du bien-être s'applique, et équilibre et optimum coïncident.

5. Gestion de l'encombrement

On a vu précédemment que les individus participent trop et visitent trop le site de meilleure qualité. On s'intéresse ici aux instruments qui permettraient de gérer l'encombrement en améliorant le bien-être. Dans un premier temps, une politique de premier rang est examinée : la taxation. On formalise le jeu de taxes permettant d'atteindre l'optimum. Cependant, la taxation est difficile à mettre en œuvre dans des espaces ouverts avec de multiples accès. De plus, cette régulation n'est pas possible sur les terrains du Conservatoire du littoral qui doit, si l'état du site le permet, ouvrir l'accès au public à titre gratuit⁶. Face à la difficulté de taxer, une stratégie du Conservatoire est de tenter de délester certains sites en attirant les visiteurs sur des sites phares par des aménagements appropriés. Cette stratégie est connue sous le nom de « pot de miel ». Dans un deuxième temps, on a donc cherché à prévoir, à partir de notre modèle, les conséquences d'une variation de qualité sur la fréquentation et le bien-être collectif des visiteurs sur un site, sans aller jusqu'à poser le problème en terme de qualité optimale.

5.1. Taxes optimales

La résolution de l'optimum fait apparaître deux désutilités externes, l'une étant liée à la participation, l'autre à la visite du site le plus fréquenté. La première idée qui vient à l'esprit est donc de proposer un couple de taxes, dont une première qui frapperait la participation et une deuxième qui serait prélevée lors de la visite au site de meilleure qualité. Cependant, autant il est réaliste d'envisager la taxation des visites aux sites, par exemple sous la forme de parkings payants ou de droits d'entrée, autant en pratique, il est impossible de taxer la décision de participer avant que le choix du site ne soit connu. Pour cette raison, on propose de taxer les visites aux deux sites, dans le but de freiner simultanément la participation et la visite au site 1. La taxe est formulée comme une

⁶ Le site de la Pointe du Raz paraît faire exception, mais le caractère payant de l'unique stationnement du site n'est possible que parce qu'il est situé en dehors des terrains du Conservatoire du littoral.

désutilité qui diminue l'utilité de la visite aux sites. Les taxes optimales internalisent les désutilités externes en ce sens que l'équilibre de Nash est déplacé pour se confondre avec l'optimum. On obtient les taxes optimales t_j en résolvant le système où les probabilités d'équilibre avec taxe sont égales aux probabilités optimales (de participation et de visite au site 1). Comme dans la résolution de l'optimum, il est nécessaire d'avoir recours à la formule d'Erlander pour extraire les taxes optimales (cf. annexe E).

On cherche t_1 et t_2 telles que :

$$\begin{aligned} p_G^*(t_1, t_2) &= p_G^0 \\ p_{1|G}^*(t_1, t_2) &= p_{1|G}^0 \end{aligned}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} p_{1|G}t_1 + (1 - p_{1|G})t_2 = -p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G} \\ t_2 - t_1 = p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}} \end{cases} \quad (18)$$

d'où les taxes optimales :

$$t_1^0 = -p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G} - (1 - p_{1|G}) p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + 1 - p_{1|G} \quad (19)$$

Les deux taxes internalisent l'effet externe dû à la trop forte participation. La taxe au site 1 est ensuite augmentée d'une partie de l'externalité de visite tandis que la taxe au site 2 est diminuée de la part complémentaire de l'externalité de visite au site 1.

5.2. Effet de la qualité

La variation du bien-être suite à une variation de qualité s'écrit :

$$\frac{dW}{d\beta_j} = \frac{\partial W}{\partial p_{j|G}} \times \frac{dp_{j|G}}{d\beta_j} + \frac{\partial W}{\partial p_G} \times \frac{dp_G}{d\beta_j} + \frac{\partial W}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \beta_j} \quad (20)$$

Trois effets apparaissent :

– un effet direct positif sur l'utilité dû à l'amélioration de la qualité $\frac{\partial W}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \beta_j}$;

– deux effets indirects :

- $\frac{\partial W}{\partial p_G} \times \frac{dp_G}{d\beta_j}$, l'effet sur le bien-être de l'augmentation de la participation ;
- $\frac{\partial W}{\partial p_{j|G}} \times \frac{dp_{j|G}}{d\beta_j}$, l'effet sur le bien-être de l'augmentation de la probabilité conditionnelle de visiter un site.

Au-delà de l'effet sur le bien-être des visiteurs, il faudrait prendre en compte le coût de production de la qualité. La technologie utilisée pour cette amélioration de qualité serait probablement à rendements décroissants ou constants. Ce coût serait à retrancher de l'effet sur le bien-être.

5.2.1. Impact d'une variation de qualité à l'optimum

À l'optimum, on a $\frac{\partial W}{\partial p_{j|G}} = 0$ et $\frac{\partial W}{\partial p_G} = 0$ de sorte que les effets indirects disparaissent :

$$\frac{dW}{d\beta_j} = p_G \cdot p_{j|G} \frac{\partial f}{\partial \beta_j} \geq 0$$

A l'optimum, seul l'effet direct de l'augmentation de la qualité joue. La variation de qualité n'entraîne pas de coûts de congestion. Le gestionnaire peut accroître la qualité basse ou la qualité haute. Si $\beta_j > \beta_k$ alors $p_{j|G} > p_{k|G}$, car le site de meilleure qualité ne peut pas être moins visité que celui de qualité basse (cf. preuve en annexe B). Dans le cas particulier où la fonction de qualité est à rendements constants, alors

$p_{j|G} \frac{\partial f}{\partial \beta_j} > p_{k|G} \frac{\partial f}{\partial \beta_k}$: l'augmentation de la qualité haute a un impact plus important

que celle de la qualité basse. Cependant, cette variation de bien-être est à comparer à son coût. Si le coût marginal de la qualité est également constant, alors le décideur public a intérêt à privilégier la qualité haute. Dans les autres cas, on ne peut pas conclure sur la qualité la plus pertinente à améliorer. Le cas classique où la fonction de qualité est à rendements décroissants et les coûts marginaux croissants est le plus défavorable à la qualité haute.

5.2.2. Impact d'une variation de qualité à l'équilibre

A l'équilibre, les probabilités $p_{j|G}$ et p_G sont endogènes, on retrouve donc les trois effets sur le bien-être d'une augmentation de β_j :

$$\frac{dW}{d\beta_j} = \frac{\partial W}{\partial p_{j|G}} \times \frac{dp_{j|G}}{d\beta_j} + \frac{\partial W}{\partial p_G} \times \frac{dp_G}{d\beta_j} + \frac{\partial W}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \beta_j}$$

Deux effets supplémentaires par rapport à l'optimum apparaissent ici :

– le premier effet indirect $\frac{\partial W}{\partial p_G} \times \frac{dp_G}{d\beta_j}$ dû à l'augmentation de la participation.

Celui-ci est toujours négatif quelle que soit la qualité augmentée car on a montré que $\frac{\partial W}{\partial p_G} < 0$ à l'équilibre (équation 14) ;

– le second effet indirect $\frac{\partial W}{\partial p_{j|G}} \times \frac{dp_{j|G}}{d\beta_j}$ dépend de la qualité améliorée.

On différencie l'augmentation de la qualité haute de celle de la qualité basse.

Cas 1. On augmente la qualité haute β_1 , l'effet $\frac{\partial W}{\partial p_G} \times \frac{dp_G}{d\beta_j} + \frac{\partial W}{\partial p_{j|G}} \times \frac{dp_{j|G}}{d\beta_j}$

indirect global est entièrement négatif. On retrouve ici le résultat de Sibly (2001) obtenu dans un modèle microéconomique mono-site : il faut investir moins dans la qualité à l'équilibre qu'à l'optimum.

Cas 2. On augmente la qualité basse β_2 , la congestion entre les deux sites est rééquilibrée car le site de qualité haute était trop visité. Le coût de la congestion est donc moins important que lorsque l'on améliore la qualité haute. On pense cependant que la baisse de bien-être due à l'augmentation de la participation sera plus forte que la hausse engendrée par une meilleure répartition de la fréquentation entre les deux sites et, donc, que la somme des deux effets indirects sera négative.

La qualité la plus judicieuse à améliorer ne peut être décidée qu'en examinant les propriétés des fonctions de qualité et de coût. Si la fonction de qualité est croissante à pente décroissante tandis que la fonction de coût est croissante à pente croissante, le gestionnaire aura tendance à augmenter la qualité basse qui entraîne moins de coûts de congestion à l'équilibre.

6. Une illustration simplifiée

6.1. Le choix des rivières par les pêcheurs de saumon

Notre modèle théorique a été testé sur les données de Salanié (2006), qui a étudié le comportement récréatif des pêcheurs au saumon pratiquant sur les rivières de l'Ouest de la France. Dans ce travail, la méthode des coûts de déplacement a été mise en œuvre en ayant recours à plusieurs modèles, dont le modèle de choix discret. La probabilité de choisir une des 28 rivières à saumon de l'Ouest est expliquée par le coût de déplacement pour se rendre à la rivière et certaines caractéristiques de la rivière : durée de la saison de pêche, captures annuelles de saumon, indice de pollution agricole, indicateur de congestion moyen observé sur la saison. Ce dernier indicateur est calculé en divisant le nombre total de visites effectuées sur une rivière dans la saison, reconstitué à partir d'enquêtes, par la durée de la saison de pêche, la longueur pêchable⁷ et la racine carrée du débit de la rivière⁸. Ce modèle a été estimé sur les données de fréquentation des rivières par les pêcheurs de saumon, sans prendre en compte la participation, c'est-à-dire en considérant que les pêcheurs choisissent systématiquement de visiter un site à chaque opportunité de choix ($p_G = 1$). Il s'agit d'un modèle multinomial logit ($\rho = 1$) et non d'un modèle répété, comme dans notre

⁷ Certaines rivières de l'échantillon, notamment l'Aulne, sont canalisées. La pêche ayant alors lieu essentiellement sur les jetées des écluses, la longueur pêchable des rivières a été réduite pour en tenir compte.

⁸ Salanié (2006) a recherché empiriquement l'indicateur objectif le mieux corrélé à la congestion subjective perçue par les pêcheurs.

modèle théorique. C'est la principale limite de notre application puisqu'en l'absence de modélisation de la participation, les politiques de gestion simulées ne peuvent pas agir sur le niveau global de fréquentation, mais seulement sur la répartition des visites entre les sites. Cependant, cette application permet d'illustrer le calcul de l'équilibre et la différence avec l'optimum, la comparaison entre ces deux états constituant la principale originalité de notre modèle. De plus, la valeur de la taxe optimale qui réconcilie équilibre et optimum peut être calculée et l'impact de variations de qualité, simulé.

Le modèle estimé est le suivant :

$$U_{ij} = -0,0988TC_{ij} - 1,1569C_j + 3,2748(C_j)^2 + 0,0016 JOUR_j - 0,1551POLAGRI_j + 0,0144CAPTURE_j$$

où TC_{ij} est le coût de déplacement de l'individu i au site j ; C_j , la congestion au site j ; $JOUR_j$, le nombre de jours de pêche possible sur la rivière j ; $POLAGRI_j$, l'indice de pollution agricole de la rivière j ; $CAPTURE_j$, le nombre de saumons pêchés sur la rivière j . Tous les paramètres sont significatifs au seuil de 1 %.

On réutilise le modèle en conservant les caractéristiques des sites sauf la congestion qui est endogénéisée en considérant une population de $n = 100$ pêcheurs, faisant face au même coût de déplacement⁹ pour être cohérent avec l'hypothèse d'homogénéité des individus du modèle théorique. Pour les mêmes raisons, on limite notre simulation à deux rivières substitués, de qualités suffisamment différentes : l'Aulne est le site 1 de qualité haute, l'Odet est le site 2 de qualité inférieure (cf. tableau 2).

Tableau 2. Attributs des sites choisis

Rivières	Aulne	Odet
Indice de pollution agricole	2	3
Captures de saumon (nb)	179	32
Jours pêchables (nb)	113	162
Indicateur de qualité composite (calculé)	2,45	0,25

L'indicateur de qualité composite de chaque rivière ($f(\beta_j) = \beta_j$) est calculé comme la combinaison linéaire des caractéristiques du site, excepté le coût de déplacement, avec les coefficients du modèle multinomial. La congestion endogène est introduite en multipliant le nombre espéré de visites à un site par l'inverse du produit de la longueur l_j et de la racine du débit d_j ¹⁰, soit $\gamma_j = \frac{1}{l_j \times \sqrt{d_j}}$. On obtient ainsi les indicateurs de congestion aux deux sites :

$$C_1 = \gamma_1 n p_1$$

$$C_2 = \gamma_2 n (1 - p_1)$$

⁹ Coût moyen de l'échantillon.

¹⁰ Ce produit représente en quelque sorte la capacité de charge du site.

Pour ne pas introduire un facteur supplémentaire compliquant l'interprétation des résultats de la simulation, on a retenu le même coefficient $\gamma=0,035$, égal au γ moyen, pour les deux rivières. Enfin, pour être cohérent avec notre modèle théorique et obtenir un équilibre stable, on a modifié le modèle pour que l'utilité soit une fonction linéairement décroissante de la congestion et fixé arbitrairement la pente à $\alpha = -0,45$.

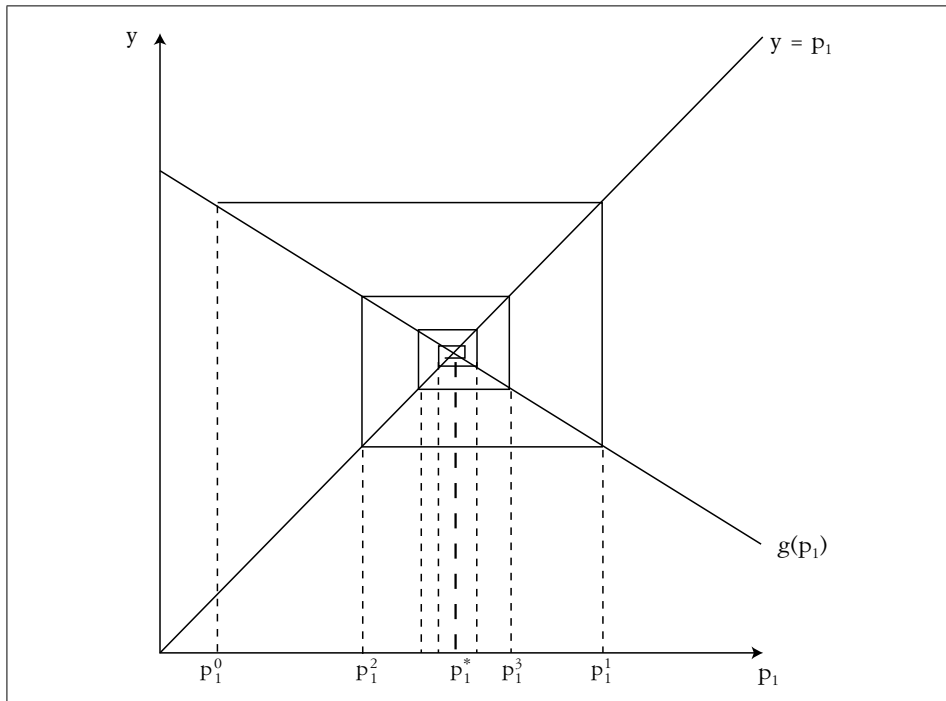
6.2. Equilibre et optimum

L'équilibre correspond au point fixe de l'équation :

$$p_1 = \frac{1}{1 + e^{U_2(p_1) - U_1(p_1)}}$$

Cet équilibre est unique car le coefficient de la congestion est négatif (Bayer et Timmins, 2005). On a représenté à la figure 2 le processus dynamique d'ajustement de la fréquentation du site 1, qui conduit ici à un équilibre stable, à la manière du cobweb qui simule les cycles du marché lorsque l'offre ne s'ajuste pas instantanément au prix. La probabilité p_1 représente le signal de congestion, qui modifie à son tour la fréquentation du site, ce qui explique l'alternance entre probabilités faibles et élevées qui s'amortit jusqu'à l'équilibre $p_1^* = 0,786$. La fréquentation est très déséquilibrée au profit du site 1.

Figure 2. Illustration graphique du calcul de l'équilibre



L'optimum correspond à la solution du programme :

$$\max_{p_1} p_1 U_1(p_1) + (1 - p_1) U_2(p_1) - p_1 \ln p_1 - (1 - p_1) \ln(1 - p_1)$$

La probabilité optimale, $p_1^0 = 0,708$, confirme que le site de meilleure qualité est trop visité à l'équilibre. Cependant, l'optimum améliore faiblement le bien-être collectif (1 506 € contre 1 471 € à l'équilibre ; cf. tableau 3).

Tableau 3. Equilibre et Optimum

	Equilibre	Optimum
p_1	0,786	0,708
C_1	2,76	2,48
C_2	0,75	1,02
$W \times n$	1 471 €	1 506 €

On pense que la différence entre équilibre et optimum est faible dans un modèle multinomial logit car une variation de qualité entraîne seulement une nouvelle répartition des visiteurs entre les sites. Dans un modèle avec participation, l'amélioration de qualité a deux effets à l'équilibre :

- augmenter la participation et donc le nombre total de visiteurs ;
- changer la répartition des visiteurs entre les sites.

L'impact sur le bien-être à l'équilibre de « l'effet participation » est probablement plus fort que celui de « l'effet répartition ». La modélisation de la participation devrait accentuer la différence entre le bien-être à l'équilibre et celui à l'optimum par rapport au modèle multinomial classique.

6.3. Instruments de gestion

On envisage d'abord une politique de régulation : la taxation optimale qui peut être mise en place sur des sites ayant un nombre restreint d'accès ou un stationnement obligatoire. Une autre piste est ensuite examinée, celle de l'investissement en qualité qui s'inspire d'une politique effectivement appliquée par le Conservatoire du littoral : la stratégie « pot de miel ».

6.3.1. La taxe optimale

Dans cette illustration, la participation n'est pas modélisée, une seule taxe est donc nécessaire pour internaliser l'effet externe de congestion. On met donc en place une taxe sur le site de meilleure qualité, l'utilité conférée par sa visite se trouve donc diminuée. On égalise la probabilité d'équilibre à la probabilité optimale.

$$\begin{aligned}
 p_1^* &= p_1^0 \\
 \frac{1}{1 + e^{U_2 - U_1 + t}} &= \frac{1}{1 + e^{U_2 - U_1 + p_1 \frac{\partial U_1}{\partial p_1} + (1 - p_1) \frac{\partial U_2}{\partial p_1}}} \\
 t &= - \left(p_1 \frac{\partial U_1}{\partial p_1} + (1 - p_1) \frac{\partial U_2}{\partial p_1} \right) \\
 t &= 0,65
 \end{aligned}$$

On trouve une taxe de 0,65 en terme d'utilité par visite qui, divisée par le coefficient des coûts de transport, donne une taxe de 6,58 € par visite au site 1.

Sous ce régime de régulation, on peut décomposer le bien-être collectif en deux parties :

- le bien-être espéré des individus : 1 040 € qui devient inférieur au bien-être des individus à l'équilibre (1 471 €) ;
- le produit espéré de la taxe : environ 466 €.

On observe un impact redistributif relativement fort pour un gain de bien-être collectif faible. La question de l'affectation de la taxe n'est pas abordée ici.

6.3.2. Variations de qualité

Tableau 4. Impacts de variations de qualité

	$d\beta_1 = 0,2$		$d\beta_2 = 0,2$	
	à l'équilibre	à l'optimum	à l'équilibre	à l'optimum
p_1	+ 2,67 %	+ 2,40 %	- 2,93 %	- 2,54 %
$W \times n$	+ 9,58 %	+ 9,64 %	+ 4,46 %	+ 4,04 %

On a simulé une augmentation absolue identique des qualités des deux sites : $d\beta_j = +0,2$. Comme l'utilité des pêcheurs est ici une fonction linéaire de la qualité, on a la même augmentation d'utilité individuelle aux sites 1 et 2. En revanche, que ce soit à l'équilibre ou à l'optimum, on obtient une augmentation de bien-être collectif plus importante quand on augmente la qualité du site de qualité supérieure plutôt que celle, moindre, de l'autre site (tableau 4). Ceci est dû aux différences de probabilité de fréquentation entre les sites : en augmentant la qualité du site 1, on améliore l'utilité de la sous-population de pêcheurs la plus nombreuse.

Par ailleurs, l'augmentation de bien-être est plus faible à l'équilibre qu'à l'optimum, quand on augmente la qualité supérieure, alors qu'on observe l'inverse en cas d'augmentation de la qualité inférieure. Ceci est dû au fait qu'à l'effet direct de la qualité, unique effet à l'optimum puisque la congestion est maîtrisée, vient s'ajouter, à l'équilibre, un effet congestion indirect, qui est négatif pour la qualité supérieure et positif pour la qualité inférieure. On observe malgré tout peu de différences entre les variations du bien-être à l'équilibre et à l'optimum, ce qui s'explique par la prépondérance de l'effet qualité dans notre exemple.

7. Conclusion

Les probabilités de participer et de visiter les sites ont été formalisées dans le cadre d'un modèle logit à deux sites avec participation, où la congestion est endogène. Les probabilités optimales ont pu être obtenues en maximisant le bien-être, calculé à partir de la formule d'Erlander (2005), et comparées aux probabilités d'équilibre. A l'optimum, les probabilités intègrent la désutilité espérée subie par tous les consommateurs du fait d'une visite supplémentaire, désutilité qui vient se retrancher à l'expression de l'utilité espérée par visite. Ceci explique que les probabilités de participer et de visiter le site de meilleure qualité sont trop élevées à l'équilibre, ce qui ne permet pas de

maximiser le bien-être. Pour réguler cette participation trop forte, et ces visites au site 1 trop nombreuses, on a recherché les taxes optimales. On montre que non seulement la visite au site le plus populaire doit être taxée, mais également celle au site le moins visité, car réguler la congestion implique de réduire la participation. Les deux taxes, au site 1 et au site 2, permettent d'internaliser la désutilité externe liée à la trop forte participation et celle liée à une fréquentation trop importante du site de qualité haute. Ces résultats et l'application de la méthode d'Erlander (2005) aux questions de congestion des sites récréatifs sont, à notre connaissance, nouveaux dans la littérature. L'amélioration de la qualité d'un site est moins efficace à l'équilibre qu'à l'optimum, en raison des coûts de congestion qui augmentent, ce qui était déjà connu et plaide pour investir davantage dans la qualité à l'optimum qu'à l'équilibre. Notre apport réside dans la décomposition de l'effet sur le bien-être de la modification de la congestion provoquée par l'amélioration de qualité. On distingue un effet lié à la participation, qui est toujours négatif, et un effet lié à la répartition entre les sites, qui est positif ou négatif selon qu'on améliore la moins bonne qualité ou la meilleure.

Ce modèle comporte un certain nombre d'hypothèses, qui pourraient faire l'objet d'améliorations ou de variantes. Il s'agit notamment de l'homogénéité des consommateurs, du nombre de sites limité à deux, de la fonction de congestion (linéaire décroissante) qui compose l'utilité. On peut, par exemple, concevoir que des consommateurs ou des groupes de consommateurs aient des préférences différentes pour la qualité ou pour la congestion, comme cela est envisagé par Richardson (2002) dans un modèle micro-économique de différenciation verticale, qui distingue les résidents et les touristes dans leur goût pour l'accessibilité aux sites de randonnée.

Notre modèle peut être estimé économétriquement, comme le montre notre application partielle et les travaux de Timmins et Murdock (2007) et Hindsley *et al.* (2008). Ces derniers ont permis de démontrer que les mesures de bien-être relatives à la valeur des sites ou à l'amélioration de leur qualité doivent intégrer la congestion. Cependant, il est probable que la prise en compte de la participation amplifie les erreurs observées dans ces travaux antérieurs. Par ailleurs, les variations de bien-être opposées que nous obtenons selon la qualité du site amélioré expliquent peut-être les variations des erreurs observées dans la littérature.

On voit également que la congestion gagnerait à être régulée, ce qui n'est pas nouveau. Dans une application avec un modèle de choix discret répété avec congestion endogène, des instruments quantitatifs ou économiques, tels que quotas ou droits d'entrée sous forme de parkings payants ou d'éloignement des parkings, pourraient être testés – à condition ici de s'inspirer de Hanley *et al.* (2002) qui ont intégré le coût d'accessibilité aux sites dans leur modèle de choix discret. Leur impact sur la participation et la répartition entre les sites ainsi que sur le bien-être collectif pourraient alors être simulés, ce qui pourrait servir aux collectivités concernées par ces problèmes. Les questions de redistribution des surplus posées par la régulation pourraient également être abordées à l'aide de ce modèle (voir à ce sujet Kim *et al.*, 2007). Enfin, des stratégies de second rang pourraient également être testées – comme celle qui consiste à aménager un site pour en soulager un autre (la stratégie « pot de miel » du Conservatoire du littoral en France) – en s'inspirant de Richardson (2002) qui considère uniquement le bien-être des résidents et la valeur ajoutée apportée par les touristes.

Bibliographie

- Anderson F., Bonsor N. (1974) Allocation, congestion and the valuation of recreational resources, *Land Economics* 50(1), 51-57.
- Anderson L. (1980) Estimating the benefits of recreation under conditions of congestion: Comments and extension, *Journal of Environmental Economics and Management* 7(4), 401-406.
- Bayer P., Timmins C. (2005) On the equilibrium properties of locational sorting models, *Journal of Urban Economics* 57(3), 462-477.
- Boxall P., Adamowicz W. (2000) Incorporating endogenous perceptions of environmental attributes in RUMs: The case of congestion, Papier présenté lors de la conférence annuelle de l'International Institute of Fisheries Economics and Trade (IIFET), Corvallis, Oregon, Etats-Unis, juillet.
- Boxall P., Hauer G. and Adamowicz W. (2005) Modeling congestion as a form of interdependence in Random Utility Models, Document de travail, Université d'Alberta, Edmonton, Canada.
- Cicchetti C., Smith V. (1973) Congestion, quality deterioration, and optimal use: Wilderness recreation in the Spanish peaks primitive area, *Social Science Research* 2(1), 15-30.
- Erlander S. (2005) Welfare, freedom of choice and composite utility in the logit model, *Social Choice and Welfare* 24, 509-525.
- Fisher A., Krutilla J. (1972) Determination of optimal capacity of resource-based recreation facilities, *Nature Resources Journal* 12, 417-444.
- Hanley N., Alvarez-Farizo B. and Shaw D. (2002) Rationing an open-access resource: Mountaineering in Scotland, *Land Use Policy* 19, 167-176.
- Hardin G. (1968) The tragedy of the commons, *Science* 162, 1243-1248.
- Hindsley P., Landry C., Bin O. and Vogelsong H. (2008) Site congestion in recreation choice models: A generated regressors approach to beach site selection, Papier soumis en cours de révision, 39 p.
- Kim H.N., Shaw W.D. and Woodward R.T. (2007) The distributional impacts of recreational fees: A discrete choice model with incomplete data, *Land Economics* 83(4), 561-574.
- McConnell K. (1977) Congestion and willingness to pay: A study of beach use, *Land Economics* 53(2), 185-195.
- Morey E. (1999) Two RUM's uncloaked: Nested logit models of participation and site choice, in: *Valuing Recreation and the Environment: Revealed Preference Methods in Theory and Practice*, Morey E., Northampton (MA), Edward Elgar, Chapter 2, 65-120.
- Morey E., Rowe R. and Watson M. (1993) A repeated nested-logit model of Atlantic salmon fishing, *American Journal of Agricultural Economics* 75(3), 578-592.

- Petit J. (2006) Fréquenter et protéger les espaces naturels : historique et analyse de la situation française, Papier présenté lors de l'atelier annuel du Conservatoire du littoral « Littoral convoité : entre accès et excès », Rochefort-sur-mer, France, mai.
- Richardson M. (2002) Quality and congestion in environmental goods: the road to the Wangapeka, *Journal Of Environmental Economics and Management* 43(3), 477-496.
- Salanié J. (2006) Analyse économique d'une activité récréative : la pêche au saumon en France, Mémoire de thèse, Ecole nationale supérieure agronomique de Rennes.
- Sibly H. (2001) Pricing and management of recreational activities which use natural resources, *Environmental and Resource Economics* 18(3), 339-354.
- Small K., Rosen H. (1981) Applied welfare economics of discrete choice models, *Econometrica* 4,105-130.
- Timmins C., Murdoch J. (2007) A revealed preference approach to the measurement of congestion in travel cost models, *Journal of Environmental Economics and management* 53, 230-249.

ANNEXES

A. Équivalence entre la formule du bien-être d'Erlander et le logsomme à l'équilibre

A.1. Bien-être d'Erlander dans un modèle multinomial logit

La mesure du bien-être d'Erlander dans un modèle multinomial logit à j modalités s'écrit :

$$W_i = \sum_j p_{ij} U_{ij} + H(p_{ij})$$

avec $H(p_{ij}) = - \sum_j p_{ij} \ln p_{ij}$, l'entropie

$$\Rightarrow W_i = \sum_j p_{ij} U_{ij} - \sum_j p_{ij} \ln p_{ij}$$

Dans le cadre du modèle logit, les probabilités sont définies par :

$$p_{ij} = \frac{e^{U_{ij}}}{\sum_{k=1}^J e^{U_{ik}}}$$

On remplace les probabilités p_{ik} par leur définition dans le cadre du modèle logit :

$$W_i = \sum_j p_{ij} U_{ij} - \sum_j p_{ij} \ln \left(\frac{e^{U_{ij}}}{\sum_{k=1}^J e^{U_{ik}}} \right)$$

$$W_i = \sum_j p_{ij} U_{ij} - \sum_j p_{ij} (\ln(e^{U_{ij}}) - \ln \left(\sum_{k=1}^J e^{U_{ik}} \right))$$

$$W_i = \sum_j p_{ij} U_{ij} - \sum_j p_{ij} \ln(e^{U_{ij}}) + \sum_j p_{ij} \ln \left(\sum_{k=1}^J e^{U_{ik}} \right)$$

$$W_i = \ln \left(\sum_{j=1}^J e^{U_{ij}} \right)$$

A l'équilibre, on a donc bien l'équivalence entre la formule d'Erlander et celle de Small et Rosen (1981).

Erlander précise qu'on peut, de la même manière, dériver sa mesure du bien-être dans le cadre d'un modèle logit hiérarchisé dont le modèle répété (avec participation) est un cas particulier.

A.2. Bien-être d'Erlander dans un modèle avec participation

Si on suit la formule d'Erlander, le bien-être dans notre modèle répété s'écrit alors :

$$W_i = p_{i0} U_{i0} + p_{iG} U_{iG} - p_{i0} \ln(p_{i0}) - p_{iG} \ln(p_{iG})$$

avec $U_{iG} = \rho I_{iG}$

et $I_{iG} = \ln \left(\sum_j e^{U_{ij}/\rho} \right)$

Or l'utilité de participation peut également s'écrire par le biais de la formule d'Erlander. Dans un modèle logit emboîté, les probabilités conditionnelles sont définies par :

$$p_{ij|G} = \frac{e^{U_{ij}/\rho}}{\sum_k e^{U_{ik}/\rho}} \quad (21)$$

On calcule l'entropie des probabilités conditionnelles de la même manière qu'Erlander pour avoir l'équivalence entre la formule du logsomme (valeur inclusive) et l'utilité de participation telle que définie par la formule d'Erlander à l'équilibre :

$$H(p_{ij|G}) = -\sum_j p_{ij|G} \ln(p_{ij|G}) \text{ or } p_{ij|G} \text{ dans un modèle logit emboîté est défini comme (21)}$$

$$H(p_{ij|G}) = -\sum_j p_{ij|G} \ln \left(\frac{e^{U_{ij}/\rho}}{\sum_{k=1}^J e^{U_{ik}/\rho}} \right)$$

$$H(p_{ij|G}) = -\sum_j p_{ij|G} \left(\ln(e^{U_{ij}/\rho}) - \ln \left(\sum_{k=1}^J e^{U_{ik}/\rho} \right) \right)$$

$$H(p_{ik|G}) = -\sum_j p_{ij|G} U_k / \rho + \sum_j p_{ij|G} \ln \left(\sum_{k=1}^J e^{U_{ik}/\rho} \right)$$

$$H(p_{ij|G}) = -\sum_j p_{ij|G} U_k / \rho + \ln \left(\sum_{k=1}^J e^{U_{ik}/\rho} \right)$$

$$H(p_{ij|G}) = -E[U_{ij|G}] / \rho + I_{iG}$$

$$\rho H(p_{ij|G}) = -E[U_{ij|G}] + \rho I_{iG}$$

$$\rho H(p_{ik|G}) = -E[U_{ij|G}] + U_{iG}$$

On obtient donc : $U_{iG} = E[U_{ij|G}] - \rho H(p_{ij|G})$

Par conséquent, le bien-être moyen dans notre modèle à deux sites où les individus sont homogènes s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= (1 - p_G)U_0 \\ &+ p_G [p_{1|G}U_1(\beta_1, p_{1|G}, p_G) + (1 - p_{1|G})U_2(\beta_2, p_{1|G}, p_G)] \\ &- \rho [p_{1|G} \ln(p_{1|G}) + (1 - p_{1|G}) \ln(1 - p_{1|G})] \\ &- [(1 - p_G) \ln(1 - p_G) + p_G \ln(p_G)] \end{aligned}$$

B. Preuve $\frac{dU_j}{d\beta_j} > 0, \frac{dU_G}{d\beta_j} > 0, \frac{dp_{j|G}}{d\beta_j} > 0$ et $\frac{dp_G}{d\beta_j} > 0$

On a $\frac{dp_{j|G}}{dU_j} = \rho \frac{e^{(U_k - U_j)\rho}}{[1 + e^{(U_k - U_j)\rho}]^2} > 0$ et, de la même manière $\frac{dp_G}{dU_G} = \rho \frac{e^{U_0 - U_G}}{(1 + e^{U_0 - U_G})^2} > 0$.

Donc une variation de U_j (respectivement U_G) se traduit par une variation dans le même sens de $p_{j|G}$ (respectivement p_G). On a aussi : $\frac{dU_j}{dp_{j|G}} = \frac{df}{d\beta_j} + \alpha n \left(\frac{dp_{j|G}}{d\beta_j} p_G + \frac{dp_G}{d\beta_j} p_{j|G} \right)$ soit un effet qualité direct et un effet congestion indirect. Deux cas sont envisageables :

1. $\frac{dp_{j|G}}{d\beta_j} > 0$, alors $\frac{dU_j}{d\beta_j} > 0$ car U_j et $p_{j|G}$ varient dans le même sens et $\frac{dp_G}{d\beta_j} > 0$ car U_G et p_G augmentent, si U_j augmente. Il est alors nécessaire que l'effet qualité, positif, l'emporte sur l'effet congestion, négatif, pour avoir $\frac{dU_j}{d\beta_j} > 0$.
2. $\frac{dp_{j|G}}{d\beta_j} < 0$, alors $\frac{dU_j}{d\beta_j} < 0$ et donc l'effet congestion est positif et on a $\frac{dU_j}{d\beta_j} > 0$, ce qui est contradictoire.

Donc les probabilités de participation et de visite à un site et les utilités correspondantes augmentent quand la qualité du site s'améliore :

$$\frac{dU_j}{d\beta_j} > 0, \frac{dU_G}{d\beta_j} > 0, \frac{dp_{j|G}}{d\beta_j} > 0 \text{ et } \frac{dp_G}{d\beta_j} > 0.$$

C. Calcul des probabilités optimales

Définition du bien-être :

$$W = (1 - p_G)U_0 + p_G U_G - (1 - p_G) \ln(1 - p_G) - p_G \ln(p_G)$$

et

$$U_G = p_{1|G} U_1(p_{1|G}, p_G) + (1 - p_{1|G}) U_2(p_{1|G}, p_G) - \rho [p_{1|G} \ln p_{1|G} + (1 - p_{1|G}) \ln(1 - p_{1|G})]$$

On maximise ce bien-être par rapport à $p_{1|G}$ et p_G pour obtenir les probabilités optimales.

Probabilité conditionnelle optimale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial p_{1|G}} = 0 &\Leftrightarrow p_G \cdot \frac{\partial U_G}{\partial p_{1|G}} = 0 \\ &\Leftrightarrow U_1 + p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} - U_2 + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}} - \rho \ln \frac{p_{1|G}}{1 - p_{1|G}} = 0 \\ &\Leftrightarrow U_1 - U_2 + p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}} - \rho \ln \frac{p_{1|G}}{1 - p_{1|G}} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \rho \ln \frac{p_{1|G}}{1-p_{1|G}} = U_1 - U_2 + p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1-p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_{1|G}}{1-p_{1|G}} = e \left[\frac{U_1 - U_2 + p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1-p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}}}{\rho} \right]$$

$$\Leftrightarrow p_{1|G} = \frac{e \left[\frac{U_1 - U_2 + \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} (2p_{1|G} - 1)}{\rho} \right]}{1 + e \left[\frac{U_1 - U_2 + \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} (2p_{1|G} - 1)}{\rho} \right]}$$

$$\Leftrightarrow p_{1|G}^0 = \frac{1}{1 + e \left(\frac{U_2(p_{1|G}^0, p_G^0) - U_1(p_{1|G}^0, p_G^0) - \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} (2p_{1|G}^0 - 1)}{\rho} \right)}$$

Probabilité de participation optimale

On obtient par le même réarrangement des termes la probabilité de participation optimale.

$$\frac{\partial W}{\partial p_G} = 0 \Leftrightarrow U_G - U_0 + p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G} - \ln \frac{p_G}{1-p_G} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{p_G}{1-p_G} = U_G - U_0 + p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_G}{1-p_G} = e^{U_G - U_0 + p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G}}$$

$$\Leftrightarrow p_G^0 = \frac{1}{1 + e^{U_0 - U_G(p_{1|G}^0, p_G^0) - p_G^0 \frac{\partial U_G}{\partial p_G^0}}}$$

D. Désutilité collective liée à la participation

Pour une occasion de choix, il y a en moyenne np_G visites.

La désutilité infligée à une personne pour une visite supplémentaire est égale à :

$$\frac{\partial U_G}{\partial np_G} = \frac{\partial U_G}{n \partial p_G}$$

et la désutilité globale supportée par tous ceux qui participent :

$$np_G \frac{\partial U_G}{n \partial p_G} = p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G}$$

E. Taxes optimales

On note $U_G(t_1, t_2)$, l'utilité de participation avec les taxes t_1 et t_2 .

On a :

$$U_G(t_1, t_2) = p_{1|G}(U_1 - t_1) + (1 - p_{1|G})(U_2 - t_2) - p_{1|G} \ln p_{1|G} - (1 - p_{1|G}) \ln(1 - p_{1|G})$$

$$\Leftrightarrow U_G - p_{1|G}t_1 - (1 - p_{1|G})t_2$$

On pose l'égalité entre la probabilité de participer à l'équilibre avec taxes et celle de participer à l'optimum :

$$p_G^*(t_1, t_2) = p_G^0$$

$$\frac{1}{1 + e^{U_0 - U_G(t_1, t_2)}} = \frac{1}{1 + e^{U_0 - U_G - p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G}}}$$

$$\frac{1}{1 + e^{U_0 - U_G + p_{1|G}t_1 + (1 - p_{1|G})t_2}} = \frac{1}{1 + e^{U_0 - U_G - p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G}}}$$

On obtient la première équation du système 18 :

$$p_{1|G}t_1 + (1 - p_{1|G})t_2 = -p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G}$$

De la même manière, on pose l'égalité entre la probabilité de visiter le site 1 à l'équilibre avec taxe, et la probabilité de visiter le site 1 à l'optimum :

$$p_{1|G}^*(t_1, t_2) = p_{1|G}^0$$

$$\frac{1}{1 + e^{(U_2 - t_2) - (U_1 - t_1)}} = \frac{1}{1 + e^{U_2 - U_1 - \left(p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}} \right)}}$$

On obtient la deuxième équation du système 18 :

$$t_2 - t_1 = p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} p_{1|G}t_1 + (1 - p_{1|G})t_2 = -p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G} \\ t_2 - t_1 = p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}} \end{cases}$$

D'où les taxes optimales :

$$\begin{cases} t_1^0 = -p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G} - (1 - p_{1|G}) \left(p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}} \right) \\ t_2^0 = -p_G \frac{\partial U_G}{\partial p_G} + p_{1|G} \left(p_{1|G} \frac{\partial U_1}{\partial p_{1|G}} + (1 - p_{1|G}) \frac{\partial U_2}{\partial p_{1|G}} \right) \end{cases}$$

