



The World's Largest Open Access Agricultural & Applied Economics Digital Library

This document is discoverable and free to researchers across the globe due to the work of AgEcon Search.

Help ensure our sustainability.

Give to AgEcon Search

AgEcon Search

<http://ageconsearch.umn.edu>

aesearch@umn.edu

*Papers downloaded from **AgEcon Search** may be used for non-commercial purposes and personal study only. No other use, including posting to another Internet site, is permitted without permission from the copyright owner (not AgEcon Search), or as allowed under the provisions of Fair Use, U.S. Copyright Act, Title 17 U.S.C.*

No endorsement of AgEcon Search or its fundraising activities by the author(s) of the following work or their employer(s) is intended or implied.

ACTA CAROLUS ROBERTUS

Károly Róbert Főiskola tudományos közleményei
Alapítva: 2011



AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS OKTATÁSÁRÓL

KÖRTESI PÉTER

Összefoglalás

A határozott integrál értelmezése során különböző integrál-összegekkel találkozhatunk. Nyilvánvaló, hogy a határozott integrál pontosan akkor létezik, ha ezek az integrál-összegek konvergensek. Ez azt is jelenti, hogy ha egy határozott integrál létezik, mert pl. van primitív függvénye az adott intervallumon, vagy az intervallumon folytonos függvény integrálját tekintjük, akkor ez a határozott integrál egyben mindenfajta, sajátos formában felírt integrál-összegnek a határértéke is.

Kulcsszavak: integrálszámítás, integrál összegek, oktatás,

The education of the integral calculus

Abstract

While introducing the notion of definite integral one use different integral sums. By definition the definite integral exists exactly when the given sums converge. Once the definite integral exists (e.g. the given function has primitive or it is continuous on that interval) it will be the limit of all sums, even special form integral sums as well.

Keywords: integral calculus, integral sum, teaching

Elméleti háttér

Ha az f Riemann integrálható az elmélet szerint a $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_k^n)$ ([Denkinger, Gyúrkó 1999]) Riemann integrál összeg határértéke az $\int_a^b f(x)dx$, ahol Δ_n a felosztásokat, ξ_k^n az adott felosztásnak megfelelő intervallumhoz tartozó független változót jelöli. Ha tehát adott egy integrálható $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és az $[a, b]$ intervallumnak egy egyenlőközű felosztása, mégpedig a $\frac{b-a}{n}$ hosszúságú részintervallumokra, akkor az $[a, b]$ intervallum osztópontjainak halmaza:

$$\left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1) \frac{b-a}{n}, a + n \frac{b-a}{n} \right\}$$

Ehhez képezzük a

$$\sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

integrálösszeget, ahol

$$f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

rendre az f függvénynek az

$$\left[a + (k-1) \frac{b-a}{n}, a + k \frac{b-a}{n} \right]$$

részintervallumok jobboldali végpontjában felvett értékei, ekkor az előbbieket értelmében:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

s

Ha bizonyos összegek határértékének a kiszámítása a célunk, akkor már csak azt kell felismernünk, hogy milyen függvényhez és milyen intervallumhoz tartozó integrál-összeg írható fel.

1. Példa.

Számítsuk ki a következő összeg határértékét:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \right)$$

Az adott összeg rendre átalakítható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) \frac{1}{n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) \frac{1}{n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}, \text{ ahol } f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x},$$

ez viszont egy integrálható függvény, és ismert, hogy:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Tehát felírható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \right) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

A vázolt módszer nyilván más módosításokkal is alkalmazható, pl. ha az integrál-összeget nem a részintervallumok felső, hanem az alsó végpontjában, vagy akár egy köztes pontjában (felezőpont) írjuk fel, vagy ha az intervallum felosztása nem n , hanem pl. $2n$, 2^n részre történik. Ezekben az esetekben a megfelelő módosítások után hasonlóan számítható ki az adott összegek határértéke.

2. Példa.

Számítsuk ki a következő összeg határértékét:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}}{n} \right).$$

Az adott összeg rendre átalakítható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}}{n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right) \frac{1}{n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(0 + (k-1) \frac{\pi}{2n}\right) \frac{1}{n} \text{ ahol } f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x,$$

ez viszont egy integrálható függvény, és ismert, hogy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Tehát felírható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}}{n} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Az elv alkalmazható a határozott integrál helyett például az improprius integrálok esetén is, bizonyos megszorításokkal. Elégséges például, ha az integrandusz függvény pozitív és monoton csökkenő lásd pl.: (Démidovitch *et al.*, 1968).

3. példa.

Számítsuk ki a következőösszeg határértékét:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n}{3}} + \dots + 1}{n} \right)$$

Az adott összeg rendre átalakítható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n}{3}} + \dots + 1}{n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{n}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}} \right) \frac{1}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n}$$

ahol

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

ez viszont egy improprius integrálhoz vezet, és ismert, hogy

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0+0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0+0} 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = 2.$$

Tehát felírható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n}{3}} + \dots + 1}{n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0+0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0+0} 2\sqrt{x} \Big|_a^1 = 2$$

Bizonyos esetekben az adott összeg csak egy felsőkorlátját tudjuk meghatározni, de ez is fontos, hiszen a felülről korlátos pozitív tagú összegek egy monoton növekvő sorozatot alkotnak, tehát az összegek-sorozata (sor) monoton nő és felülről korlátos akkor konvergens a sorozat (a sor konvergens). Tehát ez a módszer alkalmas bizonyos sorok konvergenciájának a vizsgálatára is.

4. Példa.

Igazoljuk, hogy az

$$s_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

egy konvergens sor részösszege (Draghicescu et al., 1976).

Az adott sor felülről korlátozható az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ improprius integrál egy lehetséges integrál összegének határértékével, csak például elengedjük azt a kikötést, hogy a részintervallumok hossza csökkenő kell, hogy legyen.

Felírhatjuk:

$$s_n \leq 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = 3,$$

mivel az $[1, \infty)$ intervallum egy lehetséges felosztása az $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, és ekkor a részintervallumok hossza 1, ez ugyan nem csökken a 0-hoz, de alkalmas arra, hogy alulról korlátozza az integrál értékét. Tehát maga az összeg is határértékben az adott improprius integrálnak egy alsó korlátja. Ugyanakkor:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_1^b \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{1}} \right) = 2.$$

Tehát

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = 3,$$

azaz a sor felülről korlátos és emellett a sor pozitív tagú, tehát monoton növekvő, és így konvergens.

5. Példa.

Legyen $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ Egy Riemann-értelemben integrálható függvény. Az $(a_n)_{n \geq 1}$ szigorúan pozitív tagú sorozat a következő tulajdonsággal rendelkezik (Giurgiu – Turtoiu, 1981):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max(a_1, a_2, \dots, a_n)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = 0$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}\right) \frac{a_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \int_0^1 f(x) dx;$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$$

Megoldás:

a) Vegyük a $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ felosztások sorozatát, ahol

$$\Delta_n = \left\{ 0, \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \dots, 1 \right\};$$

és amelyre a felosztás normája

$$\|\Delta_n\| = \frac{\max(a_1, a_2, \dots, a_n)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \rightarrow 0.$$

Ha a függvényértékeket pontosan a felosztási pontokban vesszük, azaz

$$\xi_k^n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, k = 1, 2, \dots, n$$

rögtön belátható, hogy az egyes felosztásokhoz tartozó Riemann-féle összeg

$$\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_k^n) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}\right) \frac{a_k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

és így ezen összegek sorozatának határértéke (mivel a felosztások normája tart nullához),

$$\int_0^1 f(x) dx$$

éppen

$$\Delta_n = \left\{ 0, \frac{1^2}{n^2}, \frac{2^2}{n^2}, \dots, \frac{k^2}{n^2}, \dots, 1 \right\}$$

b) Tekintsük a felosztásokat, amelyekre az osztópontok

$$x_k^n = \frac{k^2}{n^2}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Észrevehető, hogy $x_k^n - x_{k-1}^n = \frac{2k-1}{n^2} \leq \frac{2n-1}{n^2}$ és ezért $\|\Delta_n'\| \rightarrow 0$.

Az egyes közbe esőpontokat újból a felosztási pontokba választva,

$$\xi_k^n \in [x_{k-1}^n, x_k^n], \xi_k^n = x_k^n = \frac{k^2}{n^2} (k = 1, 2, \dots, n);$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta_n'}(f, \xi_k^n) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n^2} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k^2}{n^2}\right), \end{aligned}$$

ahonnan:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \sigma_{\Delta_n'}(f, \xi_k^n) + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k^2}{n^2}\right). \quad (1)$$

Mivel az f függvény integrálható, így korlátos is, tehát létezik olyan $M > 0$, amelyre

$|f(x)| \leq M$, bármely $x \in [0, 1]$ értékre. Ennek alapján

$$\left| \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) \right| \leq \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) \right| \leq \frac{nM}{2n^2} \rightarrow 0,$$

valahogy az (1)-es összefüggés jobboldalán a második tag határértéke nulla.

Az (1) összefüggésben határértékre térve kapjuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx.$$

Köszönetnyilvánítás:

A tanulmány a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 projekt támogatásával készült el.

Hivatkozott források:

Denkinger G. Gyurkó L. (1999): Analízis gyakorlatok, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999, 70-71, 265-267.

- Démidovitch M., et all. (1968): Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathematique, Mir Moscou, 1968, 159.
- Draghicescu et all. (1976): Ghid de pregatire la matematica, Scrisul Rominesc, Craiova, 1976, 195-196.
- Giurgiu I. - Turtoiu F. (1981): Culegere de probleme de matematica, Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1981, 217-219.

Szerző:

Körtesi Péter, PhD

egyetemi docens

Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék

matkp@uni-miskolc.hu