AgEcon SEARCH
RESEARCH IN AGRICULTURAL & APPLIED ECONOMICS

The World's Largest Open Access Agricultural & Applied Economics Digital Library

This document is discoverable and free to researchers across the globe due to the work of AgEcon Search.

Help ensure our sustainability.

Give to AgEcon Search

AgEcon Search
http://ageconsearch.umn.edu
aesearch@umn.edu

*Papers downloaded from **AgEcon Search** may be used for non-commercial purposes and personal study only. No other use, including posting to another Internet site, is permitted without permission from the copyright owner (not AgEcon Search), or as allowed under the provisions of Fair Use, U.S. Copyright Act, Title 17 U.S.C.*

UMA ANÁLISE APLICADA DE DECISÃO COM OPÇÃO DE VENDA UTILIZANDO CADEIAS DE MARKOV

JOSÉ CÉSAR CRUZ JÚNIOR; RICARDO MENDONÇA FONSECA; LUIZ FERNANDO OHARA KAMOGAWA;

ESALQ/USP

PIRACICABA - SP - BRASIL

cesarcruzjr@hotmail.com

APRESENTAÇÃO SEM PRESENÇA DE DEBATEDOR

COMERCIALIZAÇÃO, MERCADOS E PREÇOS AGRÍCOLAS

Uma análise aplicada de decisão com opção de venda utilizando cadeias de Markov

Grupo de Pesquisa: 1- Comercialização, Mercados e Preços Agrícolas.

1. INTRODUÇÃO

Os mercados futuro e de opções agropecuárias constituem importantes fontes de proteção e investimento, tanto para produtores, quanto para *traders* e outras instituições financeiras e não financeiras.

O mercado de opções funciona assim, como um dos instrumentos que fazem parte da "caixa de ferramentas" com que empresas, investidores individuais e institucionais contam para formação de suas estratégias de comercialização. No intuito de reduzir as incertezas do dia-a-dia, uma vez que possuem uma gama de diversas opiniões sobre situações que envolvem o mercado, tais agentes podem recorrer ao mercado opções como forma de proteção. (Corrêa e Raíces, 2005)

Marques e Mello (1999) ressaltam algumas vantagens do mercado de opções em relação aos mercados futuros, tais como limitar os prejuízos do comprador ao valor do prêmio pago; a não necessidade de pagamento de ajustes diários por parte do mesmo; e a possibilidade destes se aproveitarem de ganhos no mercado, caso estes se comporte favoravelmente. Por parte dos lançadores, o mercado de opções pode ser uma importante fonte de captação de recursos diante do recebimento do prêmio pago pelos compradores.

No intuito de ampliar o número de ferramentas auxiliares na tomada de decisão no mercado de opções, o presente trabalho teve como objetivo a realização de um exercício aplicado à venda ou exercício de uma opção de venda (*put*) de café arábica na BM&F.

2 - REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 MERCADO DE OPÇÕES

De acordo com Corrêa e Raíces (2005), uma opção é um contrato que dá a seu titular (comprador) o direito de compra ou venda de um ativo a um preço pré-estabelecido, denominado preço de exercício ou *strike price* (X), em uma data futura, chamada de data de vencimento.

As opções de compra (*call*) e venda (*put*) podem ser classificadas em européias ou americanas. Enquanto as opções européias podem ser exercidas pelo seu titular apenas na data de vencimento, as opções americanas podem ser exercidas a qualquer momento entre a datas de compra e de vencimento.

Uma vez que o titular da opção tem o direito de exercê-la ou não, a outra parte, o lançador da opção, assume a responsabilidade de atender ao direito do comprador. Para que o lançador se disponha a ser exercido, ele recebe um prêmio (C) pago pelo comprador. O valor do prêmio pago pelo comprador para ter o direito de exercer a opção seja ela uma *call* ou uma *put*, varia com o tempo e é determinado pelas forças de mercado. Segundo Corrêa e Raíces (2005) alguns dos fatores que determinam o valor do prêmio pago, ou o valor da opção são:

1. tipo da opção e expectativa do mercado em relação aos preços do ativo objeto: num mercado *bullish* as opções de compra são mais procuradas, de modo que o valor do prêmio pago por estas aumenta com as expectativas dos agentes em aproveitarem-se do exercício da compra do ativo a um preço mais baixo no futuro. Por outro lado, num mercado *bearish* as expectativas de baixa de preços fazem com que a procura maior seja por opções de venda, fazendo com que o prêmio pago por estas aumente com a expectativa dos agentes em aproveitarem-se do exercício da venda do ativo a um preço mais alto no futuro.
2. preço de mercado (*stock price*) em relação ao preço de exercício: quanto maior a proximidade dos dois preços, maior a probabilidade da opção ser exercida, portanto, maior seu preço. Por outro lado, quanto mais distantes estiverem estes preços, menor será a probabilidade de exercício da opção e menor também será seu preço.
3. volatilidade do preço do ativo: o preço da opção será tanto maior quanto maior for a volatilidade do ativo subjacente.
4. tempo restante até o vencimento: o valor tempo de uma opção é diretamente relacionado à distância até seu vencimento, de forma que, quanto mais distante da maturidade do contrato, maior o valor do prêmio.

Um investidor que compra uma *call* espera que o preço de mercado do ativo subjacente (S_T) esteja mais alto que o preço de exercício (X) da opção no futuro. Caso a diferença entre os preços de mercado e de exercício possibilite ao comprador exercer a opção de compra com lucro, diz-se que a *call* está dentro-do-dinheiro ou *in-the-money* (*ITM*). Caso contrário a *call* está fora-do-dinheiro ou *out-of-the money* (*OTM*).

Por sua vez, um investidor que compra uma *put* espera que, no futuro, o preço de exercício (X) esteja acima do preço de mercado do ativo (S_T). Caso esta diferença seja suficientemente grande, de modo que o exercício da opção proporcione lucro ao titular da *put*, diz-se que ela está dentro-do-dinheiro. Caso contrário ela estará fora-do-dinheiro.

A diferença entre o preço de mercado e o preço de exercício é denominada de valor intrínseco. Diante das relações apresentadas anteriormente e assumindo que o valor de uma

opção fora-do-dinheiro é zero, os valores intrínsecos para uma *call* e uma *put* podem ser determinados da seguinte forma:

Valor intrínseco para uma opção de compra (*Call*): $Max\ (S_T - X,\ 0)$

Valor intrínseco para uma opção de venda (*Put*): $Max\ (X - S_T,\ 0)$

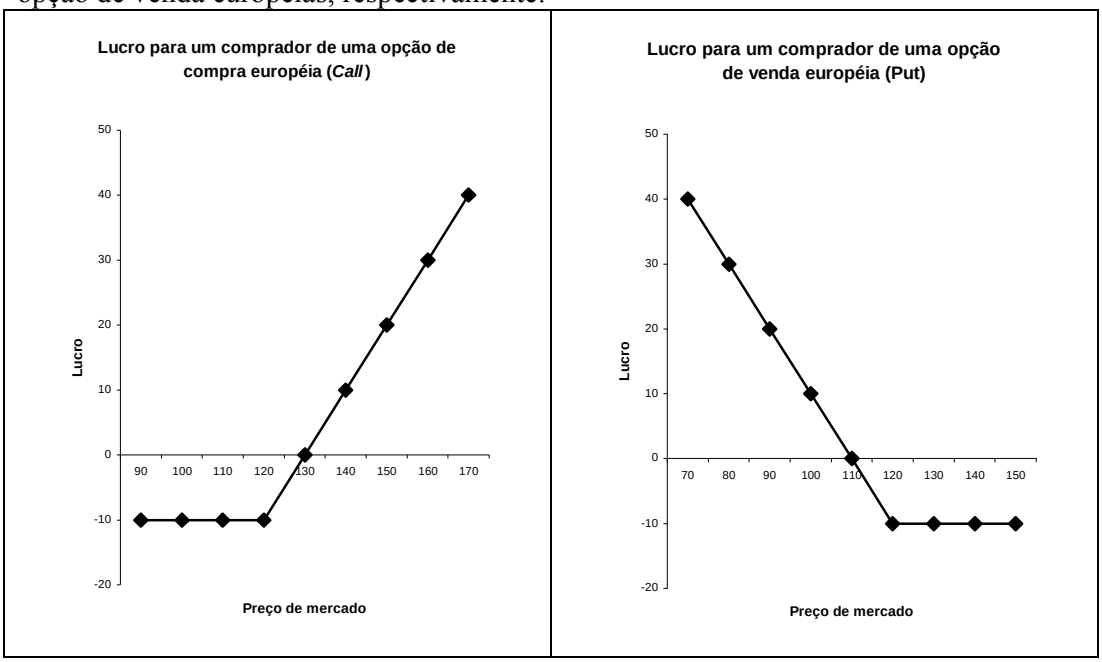
Assim, o lucro auferido pelo comprador de uma *call* será igual a:

$$Max\ (S_T - X - C,\ -C)$$

Enquanto isso, o lucro auferido pelo comprador de uma *put* será:

$$Max\ (X - S_T - C,\ -C)$$

A Figura 1, a seguir, mostra estas relações para a compra de uma opção de compra e uma opção de venda européias, respectivamente.



Nota: X = $ 120,00 e C = $ 10,00.

Figura 1 – Lucro auferido pelo comprador de uma *call* e de uma *put*.

É interessante notar que o mínimo lucro (ou analogamente a máxima perda) incorrido pelo comprador de uma *call* ou de uma *put* é igual ao valor pago pelo prêmio da opção.

O lançador da opção, por sua vez, possui expectativas contrárias às do comprador em relação à direção dos preços de mercado quando comparados ao preço de exercício.

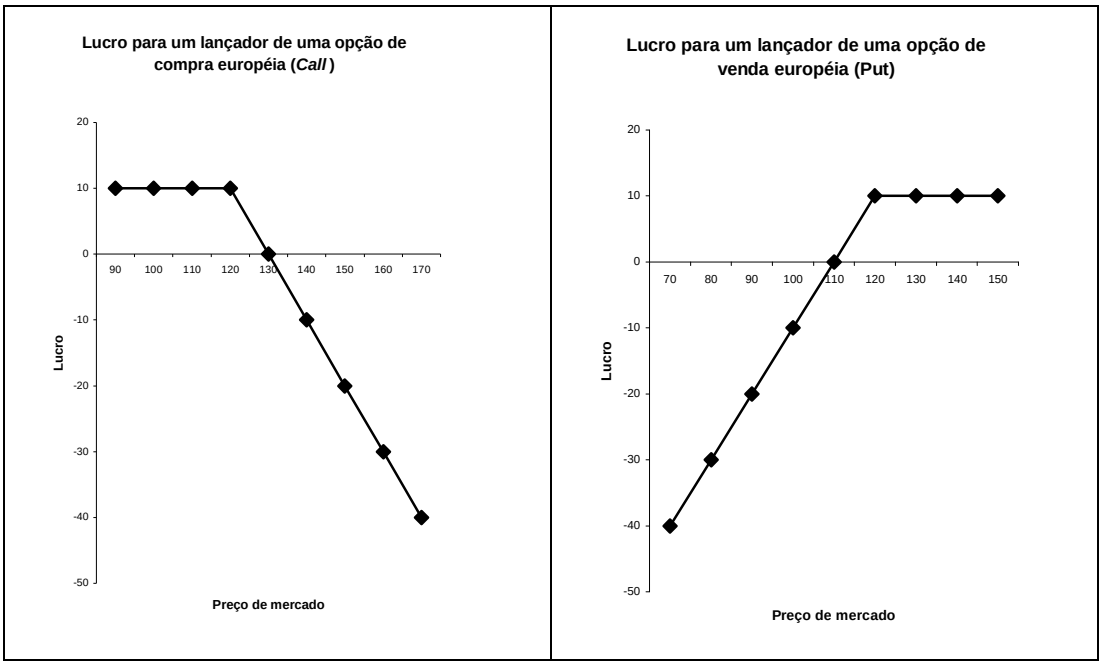
O lucro auferido pelo lançador de uma opção de compra será igual a:

$$Min\ (X - S_T - C,\ C) = -\ Max\ (S_T - X - C,\ -C)$$

Analogamente, o lucro auferido pelo lançador de uma *put* será:

$$Min\ (S_T - X - C,\ C) = -\ Max\ (X - S_T - C,\ -C)$$

A Figura 2 resume os resultados possíveis para o lançador de uma opção.



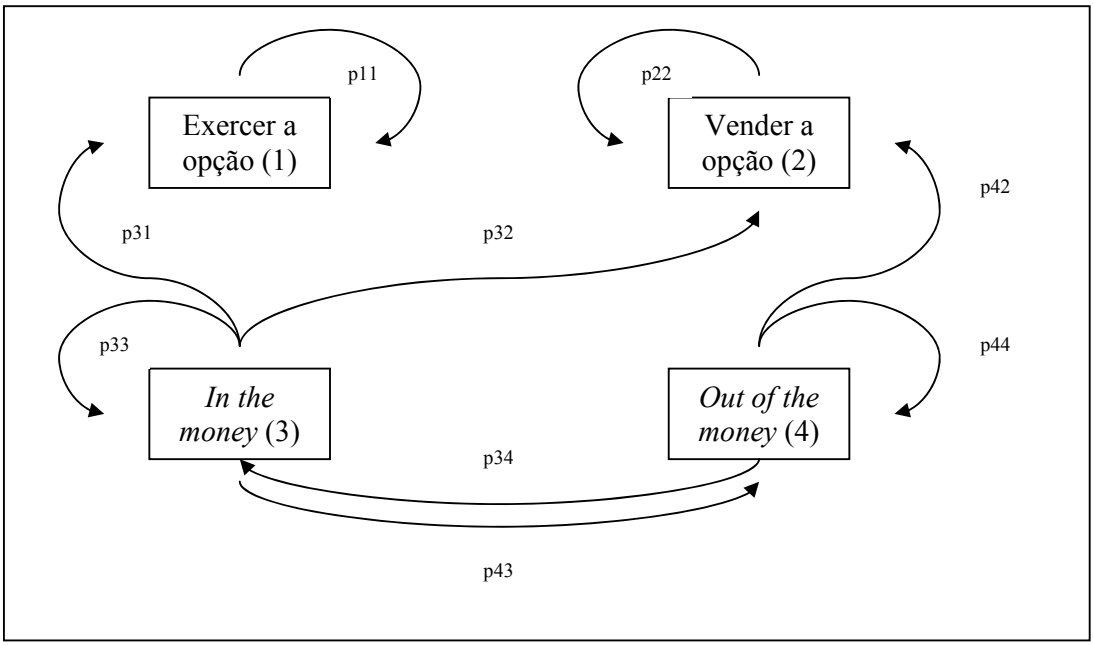
Nota: X = $ 120,00 e C = $ 10,00.
Figura 2 – Lucro auferido pelo lançador de uma *call* e de uma *put*.

No presente trabalho, o ativo subjacente à opção é o contrato futuro de café arábica negociado na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) com vencimento em setembro de 2005. Desta forma, o contrato de opção negociado é denominado contrato de opções sobre futuro. A diferença básica deste tipo de contrato para os tradicionais contratos de opções é que, uma vez exercida a opção de compra/venda, o titular recebe do lançador uma posição comprada/vendida no contrato futuro do ativo subjacente (contrato futuro de café arábica com vencimento em setembro de 2005 na BM&F) mais a diferença entre o preço futuro sobre o de exercício (diferença entre o preço de exercício sobre o futuro, no caso de uma *put*). Hull (2005)

3 – METODOLOGIA

3.1 CADEIAS DE MARKOV, ESTADOS E PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO

As cadeias de Markov têm como intuito a consecução de uma matriz de transição entre todos os estados possíveis (ou considerados). Os possíveis estados de ocorrência no mercado de opções são apresentados na Figura 3.



Fonte: Deacon e Faseruk (2003).
Figura 3: Estados de transição de uma opção de venda.

As flechas apresentadas na Figura 3 indicam as direções das possíveis transições entre os estados, bem as correspondentes probabilidades, p_{ij}, de transição entre eles. Com base nesta Figura, uma matriz de transição entre os estados pode ser construída da forma apresentada na Tabela 1.

Tabela 1 – Matriz de probabilidades de transição

	Exerce	Vende	*In-the-money*	*Out-of-the-money*
Exerce	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
Vende	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
In-the-money	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}
Out-of-the-money	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}

Fonte: Figura 3.

A matriz de probabilidade de transição pode ser interpretada da seguinte forma: uma vez que a opção encontra-se *in-the-money* (linha 3), ela pode ser exercida com probabilidade p_{31}, vendida com probabilidade p_{32}, permancer *in-the-money* com probabilidade p_{33} ou ainda, passar para o estado *out-of-the-money* com probabilidade p_{34}. Considerando uma opção do tipo americana, a transição entre quaisquer estados pode ocorrer em qualquer instante do tempo, entre a compra e o vencimento da opção.
Ressalta-se que a soma das probabilidades de cada uma das linhas deve ser igual a 1, e ainda que $p_{ij} \geq 0$:

$$\sum_{j=1}^{4} p_{ij} = 1,\ i = 1,2,3,4$$

Uma vez construída a matriz de forma geral, algumas observações podem ser realizadas. Os estados "Vende" e "Exerce" são absorventes, ou seja, no caso de ocorrência de cada um deles, não há possibilidade de ocorrência de nenhum outro estado. Com isto, $p_{11} = 1$ e p_{12}

$= p_{13} = p_{14} = 0$. De forma equivalente, $p_{22} = 1$ e $p_{21} = p_{23} = p_{24} = 0$. Outra observação importante é que, no caso em que a opção está "fora do dinheiro" (*out-of-the-money*), não é racional exercê-la, pois, o ganho seria menor do que simplesmente vender o produto ao preço exercido no mercado. Assim, tem-se que $p_{41} = 0$. Incorporando tais informações à matriz de probabilidade de transição previamente estabelecida, tem-se a matriz representada na Tabela 2:

Tabela 2 – Matriz de probabilidades de transição reduzida

	Exerce	Vende	*In-the-money*	*Out-of-the-money*
Exerce	1	0	0	0
Vende	0	1	0	0
In-the-money	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}
Out-of-the-money	0	p_{42}	p_{43}	p_{44}

Fonte: Figura 3.

O interesse passa a ser, portanto, a determinação das probabilidades contidas na matriz de probabilidades de transição reduzida. Deacon e Faseruk (2003) sugerem os seguintes procedimentos para o cálculo destas probabilidades p_{ij}[1].

1. $p_{31} \approx e^{-s^2}$, em que s é o desvio padrão das cotações de ajuste do contrato futuro de café arábica com vencimento em setembro de 2005 na BM&F..
Ou seja, uma vez que a opção esteja *in-the-money* pode-se calcular a probabilidade desta ser exercida pela fórmula apresentada. Note que esta probabilidade de transição está fortemente condicionada ao desvio padrão: para altos valores de s, menor a probabilidade de exercício.

2. $p_{32} = \begin{cases} \mathbf{C}(X-S)e^{-\theta}, (X-S) > 0 \\ 0, (X-S) \leq 0 \end{cases}$

Em que:

C: valor do prêmio pago pela opção;
X: preço do exercício da opção;
S: cotação de ajuste do contrato futuro;
θ: *theta* da opção, que corresponde à taxa de decaimento do valor da opção no tempo. O valor do *theta* está condicionado à taxa de juros de mercado, ao tempo restante para o vencimento do contrato, à volatilidade do preço de mercado, ao valor do prêmio no momento da decisão e ao preço do exercício[2].

3. $p_{33} = 1 - p_{31} - p_{32} - p_{34}$

4. $p_{34} = \sigma exp\left[-\frac{(S-X)^2}{\mathbf{2}s^2}\right]$

σ: volatilidade do preço do contrato futuro;

[1] Os cálculos apresentados por tais autores basearam-se em um opção de compra. Ajustes baseados na teoria apresentada na seção 2 deste trabalho foram incorporados à análise de opção de venda.
[2] Para maiores detalhes ver, por exemplo, Corrêa e Raíces (2005) e Hull (1999).

5. $p_{42} = C(S - X)^{e\sigma}$

6. $p_{43} = \sigma exp\left[-\frac{(S-X)^2}{2s^2}\right]$

7. $p_{44} = 1 - p_{42} - p_{43}$

A matriz de estado estacionário pode ser obtida através da multiplicação sucessiva da matriz de probabilidades de transição reduzida por ela mesma até o ponto em que ocorra convergência de seus vetores. No entanto, Deacon e Faseruk (2003) sugerem uma forma para obtenção desta matriz.
Reescrevendo-se matriz de probabilidades de transição em quatro sub-matrizes de igual dimensão (*2X2*), obtém-se a seguinte matriz T:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}$$

Em que:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} \\ 0 & p_{42} \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$Q = \begin{bmatrix} p_{33} & p_{34} \\ p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

A matriz F, que representa a matriz de estado estacionário pode ser obtida da seguinte forma:

$F = (I - Q)\text{-}1 \times R$

Entretanto, a resolução da matriz inversa, denominada Φ ($\Phi = (I\text{-}Q)^{-1}$) é a matriz de interesse para o trabalho. Tal matriz revela as probabilidades de exercício ou venda quando a opção encontra-se *in* ou *out-of-the-money*:

	Exerce	*Vende*
In the money	Φ_{31}	Φ_{32}
Out of the money	Φ_{41}	Φ_{42}

Esta matriz é determinada, em termos das probabiliadades p_{ij} anteriormente obtidas da seguinte forma:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{p_{31}(1-p_{44})}{1 - p_{33} - p_{34}p_{43} - p_{44} + p_{33}p_{44}} & \frac{p_{34}p_{42} + p_{32}(1-p_{44})}{1 - p_{33} - p_{34}p_{43} - p_{44} + p_{33}p_{44}} \\ \frac{p_{31}p_{43}}{1 - p_{33} - p_{34}p_{43} - p_{44} + p_{33}p_{44}} & \frac{(1-p_{33})p_{42} + p_{32}p_{43}}{1 - p_{33} - p_{34}p_{43} - p_{44} + p_{33}p_{44}} \end{bmatrix}$$

3.2 – FONTE DE DADOS

Os dados utilizados são referentes às cotações de fechamento do contrato futuro de café arábica com vencimento em setembro de 2005, ao preço de exercício do contrato de opção sobre futuro com vencimento em setembro do mesmo ano e à cotação do último negócio efetuado na negociação do prêmio de tal opção. Todos os dados foram obtidos na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F).
O contrato de opção sobre futuro de setembro foi selecionado por apresentar-se com um dos mais líquidos. Um vez que este contrato vence no dia 12 de agosto (um mês antes do vencimento do contrato futuro subjacente), o período selecionado para análise é o período em que o titular da opção forma suas expectativas quanto às potenciais expectativas de exercício ou venda da opção, um mês antes de sua decisão final. Estabeleceu-se, portanto, um período de duas semanas para formação destas expectativas, abrangendo, assim o período entre 23/06/2005 a 12/07/2005.
Utilizou-se, também, a taxa do Certificado de Depósito Interbancário (CDI) para cálculo do *theta* da opção. Tal informação foi obtida no *site* do Banco Central do Brasil.

4 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Antes da realização do cálculo das probabilidades p_{ij} propriamente ditas, fez-se necessário o cálculo do desvio padrão e da volatilidade do preço futuro do contrato de café arábica com vencimento em setembro de 2005 na BM&F. Tais parâmetros foram também utilizados no cálculo do *theta* da opção, que representa a taxa na qual a opção perde valor no tempo. Para tanto, foram também utilizados o valor de mercado da opção de venda de café arábica com preço de exercício de US$ 135,00 (SET96 - U5P135) e o preço do contrato futuro subjacente (vencimento em setembro de 2005) com uma taxa de juros igual ao valor do CDI no dia 23 de junho de 2005[3]. O valor do *theta* foi igual a - 0,11145. Todas as cotações e o valor do prêmio foram normalizados em relação ao preço de exercício.
De posse destas informações a probabilidades p_{ij} foram calculadas e são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Probabilidades da matriz de transição

p_{31}	0,0566%
p_{32}	0,3809%
p_{33}	69,2749%
p_{34}	30,2875%
p_{42}	0,0000%
p_{43}	30,2875%
p_{44}	69,7124%

Fonte: Dados do trabalho.

Assim, a matriz de transição que representa os quatro possíveis estados de ocorrência é apresentada na seqüência:

[3] As variáveis utilizadas para o cálculo do *theta* da opção de venda foram S = US$ 129,00, X = US$ 135,00, t = 0,05205, s = 2,73432, σ = 0,30312, C = US$ 10,35, r = 0,1974. Todos os valores foram anualizados.

Tabela 4 - Resultado do cálculo da matriz de transição de curto prazo

	Exerce	Vende	*In-the-money*	*Out-of-the-money*
Exerce	100%	0%	0%	0%
Vende	0%	100%	0%	0%
In-the-money	0,0566%	0,3809%	69,2749%	30,2875%
Out-of-the-money	0%	0%	30,2875%	69,7125%

Fonte: dados do trabalho.

Assim, a matriz de transição apresentada na Tabela 4 representa as probabilidades de transição de curto prazo. Uma vez que a opção está *in-the-money*, esta possui probabilidade de 0,0566% de ser exercida, 0,3809% de ser vendida, 69,2749% de permanecer no mesmo estado, e 30,2875% de transitar para *out-of-the-money*. Por outro lado, se a opção encontra-se *out-of-the-money*, possui probabilidade de 30,2875% de transitar para *in-the-money* e 69,7125% de permanecer *out-of-the-money*.
Através da matriz de probabilidades de curto prazo calculada, pôde-se determinar o vetor de equilíbrio de longo prazo. Este vetor determinou que, na situação em que o investidor se encontrava na data de tomada de decisão, este possuía uma probabilidade reduzida de exercício da opção (12,94%) e uma alta probabilidade de venda desta (87,06%). Assim, o modelo desenvolvido poderia auxiliá-lo na determinação de que a melhor decisão seria vender a opção naquela data.

5 – CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta alternativa para a determinação da decisão do investidor às vésperas do vencimento de um contrato de opção de venda de café arábica. Os resultados indicam que é possível encontrar as probabilidades de exercício ou venda da opção com base nas informações contidas no mercado futuro em período pré-estabelecido, anterior à sua decisão final.
O acompanhamento rigoroso do mercado em períodos próximos ao vencimento da opção, no entanto, parece ser de grande importância, uma vez que os parâmetros utilizados para cálculo das matrizes de transição (variância e desvio padrão do preço futuro, assim como o *theta* da opção) têm grande impacto na determinação das probabilidades de curto e longo prazo.
Fica como sugestão a realização de trabalhos futuros que analisem outras *commodities* e determinem novas formas de cálculo das probabilidades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Banco Central do Brasil. **www.bacen.gov.br (**Acesso em 01 fev. 2006).

Bolsa de Mercadorias e Futuros. **www.bmf.com.br (**Acesso em 01 fev. 2006).

Corrêa, A. L., Raíces, C. **Derivativos Agrícolas**. São Paulo: Globo, 2005.

Deacon, C. G., Faseruk, A. J. Pratical solutions using markov chains to describe option state. **Journal of Financial Management & Analysis**. Vol 16, 1, Jan-Jun 2003.

Marques, P. V., e Mello, P. C. **Mercados futuros de commodities agropecuárias: exemplos e aplicações aos mercados brasileiros**. São Paulo : Bolsa de Mercadorias & Futuros, 1999.

Hull, J. **Options, futures and other derivatives**. New Jersey: Prantice Hall, 4th ed. 1999.

Hull, J. **Fundamentos dos mercados futuros e de opções**. São Paulo: BM&F, 4ª. ed. 2005.