SCHRIFTEN DER GESELLSCHAFT FÜR WIRTSCHAFTS- UND SOZIALWISSENSCHAFTEN DES LANDBAUES E.V.

Hockmann, H.: Aggregationsprobleme in der Berechnung von Indexziffern. In: Buchholz, H.E., Neander, E., Schrader, H.: Technischer Fortschritt in der Landwirtschaft – Tendenzen, Auswirkungen, Beeinflussung. Schriften der Gesellschaft für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaues e.V., Band 26, Münster-Hiltrup: Landwirtschaftsverlag (1990), S.409-415.

AGGREGATIONSPROBLEME IN DER BERECHNUNG VON INDEXZIFFERN

von

H. HOCKMANN, Göttingen

1 Einführung

In den meisten empirischen Analysen sind Fragen bezüglich des verwendeten Aggregationsgrades von untergeordneter Bedeutung. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Verwendung eines Datensatzes auf disaggregierte Ebene einen sehr aufwendigen Datensuch- und auch -transformationsprozeß verlangt. Bei der Verwendung eines Datensatzes auf hohem Aggregationsniveau tritt jedoch das Problem der Verwendung nicht adäquater bzw. inkonsistenter Aggregate auf[1].

In dieser Arbeit werden einige Effekte verschiedener Aggregationsniveaus auf die Berechnung von Indexziffern der Entwicklung der totalen Faktorproduktivität vorgestellt. Hierfür wird auf zwei Verfahren der Messung der Produktivitätsänderungen, das sind die Berechnung parametrischer Indexziffern und die Berechnung einer nichtparametrischen 'production frontier' zurückgegriffen (HANAU und RUSTEMEYER, 1965, S. 3 f.). Für beide Vorgehensweisen werden die Bedingungen für die Bildung konsistenter Aggregate erläutert, und die Effekte, die sich aus der Aggregatbildung ergeben, anhand einer empirischen Analyse verdeutlicht.

2 Aggregationseffekte in der Berechnung parametrischer Indices

Unter Produktivität versteht man das Verhältnis von Produktion und Faktoreinsatz, beide gemessen in physischen Einheiten[2]. Bezieht man den gesamten Faktoreinsatz auf die gesamte Produktionsmenge, erhält man die totale Faktorproduktivität und damit ein Maß für die Effizienz des Faktoreinsatzes im Produktionsprozeß. Effizienzänderungen im Zeitablauf (W_P) werden dann dadurch berechnet, daß ein Faktoreinsatzindex (I_F) als Maß für die Entwicklung des Faktoreinsatzes zur Produktionsentwicklung (I_Q) in Relation gesetzt wird:

$$W_P = I_Q/I_F$$

Im folgenden werden nun die Effekte bezüglich des Inputindexes näher berücksichtigt. Für den Outputindex können die gleichen Resultate hergeleitet werden.

---

1) In diesem Aufsatz bleiben die Ausführungen auf die Bedingungen der Aggregation von Gütern beschränkt. Einen umfassenden Überblick über die Aggregationsproblematik findet sich in DIEWERT (1980). Dort werden auch die notwendigen Bedingungen für die Aggregation von Betrieben zu einem Sektor näher erläutert. Zum letzten Punkt siehe auch CHAMBERS (1988, S. 182 ff.), BLACHORBY and SCHWORM.

2) Unter parametrischen Indexziffern werden hier die traditionell verwendeten Indices, wie der Laspreyers, Törnquist-Theil-Index u.a., verstanden. Diese Indices zeichnen sich dadurch aus, daß sie die Veränderungen parametrisch spezifizierter Produktionsfunktionen wiedergeben. Der später aufgeführte nichtparametrische Index gibt entsprechend die Änderungen der nichtparametrischen 'production frontier' wieder.

Für die weitere Analyse wird, ohne daß diese an Gemeingültigkeit verliert, davon ausgegangen, daß für den Produktionsprozeß Input-Output-Separabilität unterstellt werden kann. Die Faktoreinsatzseite kann dadurch durch eine Inputfunktion[3] beschrieben werden. Diese gibt für jede Kombination von erzeugten Gütern die minimal erforderlichen Inputkombinationen wieder (vgl. DIEWERT, 1976, S. 125). Beachtet man weiterhin, daß die in diesem Abschnitt behandelten Indexzahlen Veränderungen spezifizierter Funktionen wiedergeben, lassen sich die Bedingungen für eine konsistente Aggregation anhand der Inputfunktion nachvollziehen. Die konsistente Aggregation von Produktionsfaktoren (x_i) ist möglich, wenn die Inputfunktion schwach separabel in den zu aggregierenden Faktoren ist (vgl. CHAMBERS, 1988, S. 42).

$$f\,(x_1 \,\ldots\ldots\, x_n) = h\,(x_1 \,\ldots\, x_k,\ g\,(x_l, \,\ldots, x_n))$$

Die schwache Separabilität verlangt, daß die Grenzrate der Substitution zweier Faktoren, die Element der Funktion g sind, von Produktionsfaktoren, die nicht zu g gehören, unbeeinflußt bleibt (vgl. CHAMBERS, 1988, S. 42).

$$\frac{\partial \left(\dfrac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j} \right)}{\partial\ x_n} = 0 \qquad \begin{array}{l} i,\ j \text{ in } g \\ n \quad \text{nicht in } g \end{array}$$

Inwieweit diese Bedingung erfüllt ist, müßte im Rahmen einer empirischen Analyse getestet werden. Diese Möglichkeit ist jedoch bei der Berechnung von Indexzahlen nicht gegeben. Um eine konsistente Aggregation von einzelnen Faktoren zu einem Subindex zu gewährleisten, ist daher weiterhin anzunehmen, daß die Inputfunktion schwach separabel in irgendeiner Partition ihrer Argumente ist. Dies impliziert jedoch, daß die Inputfunktion koordinatweise streng separabel ist (vgl. DIEWERT, 1980, S. 439).

$$f\ (x_1\ \ldots\ x_n) = h\ (\sum_i g_i\ (x_i))\ \text{und}$$

$$\frac{\partial \left(\dfrac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j} \right)}{\partial x_n} = 0 \qquad \begin{array}{l} i \text{ in } g_i \\ j \text{ in } g_j \\ n \text{ nicht in } g_i \text{ oder } g_j \end{array}$$

Dies bedeutet, daß die Grenzrate der Substitution zwischen zwei Produktfaktoren aus verschiedenen Gruppen unabhängig vom Faktoreinsatzniveau sonstiger Faktoren ist.

3) In der englischsprachigen Literatur wird diese Funktion als 'input requirement function' bezeichnet. Da eine entsprechende deutsche Bezeichnung fehlt, wird hier der Ausdruck Inputfunktion verwendet.

Dieser Bedingung wird nur von Funktionsformen der CES-Gruppe, damit von der Cobb-Douglas-, der Leontieff- und der linearen Funktion erfüllt. Diese unterstellen für den Produktionsprozeß sehr restriktive Annahmen, die in einer empirischen Analyse häufig nicht haltbar sind.

Die Effekte, die sich aus einer inkonsistenten Aggregation für die Berechnung von Indexzahlen ergeben, wurden zuerst von DIEWERT (1978) aufgezeigt. Sein Ausgangspunkt war der Vartia-Index. Dieser Index gibt die Veränderungen einer Cobb-Douglas-Funktion wieder und ist damit entsprechend den obigen Ausführungen aggregationskonsistent. Neben dieser Eigenschaft besitzt der Vartia-Index eine wünschenswerte Approximationseigenschaft: Er gibt die Veränderungen superlativer Indices[4)] wieder, wenn die Mengen- und Preisänderungen über den betrachteten Zeitraum gering sind. Da davon ausgegangen werden kann, daß diese Bedingung bei Betrachtung benachbarter Jahre erfüllt ist, verlangt eine approximativ konsistente Aggregation die Verwendung des "Chaining", d.h. die jährliche Anpassung des Basisjahres.

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich auf den Fall, daß der Gesamt- und der Subindex nach dem gleichen Konstruktionsprinzip gebildet wird. Falls das Konstruktionsprinzip zwischen Sub- und Gesamtindex variiert, kann das gleiche Argument verwendet werden. In der oben erwähnten Arbeit zeigt DIEWERT, daß die Effekte, die zwischen dem Laspreyres und irgendeinem superlativen Index auftauchen, ebenfalls gering sind, wenn wiederum das "Chaining" verwendet wird. Da in den Statistiken Aggregate in konstanten Preisen ausgewiesen werden, ist daraus zu folgern, daß die Verwendung dieser Aggregate nur zu geringen Verzerrungen in der Indexberechnung führt, falls der betrachtete Untersuchungszeitraum gering ist.

Im folgenden werden die obigen theoretisch dargestellten Aggregationseffekte anhand einer empirischen Analyse illustriert. Dazu werden drei Indices berechnet. Als erstes wurde ein Törnquist-Theil-Index des Faktoreinsatzes unter Verwendung von 10 Produktionsfaktoren gebildet (Index I)[5)]. Als zweites wurde in einem zweistufigen Verfahren zunächst ein Subindex für den Vorleistungseinsatz mit Hilfe des Törnquist-Theil-Indexes des gesamten Faktoreinsatzes aggregiert (Index II). Beim letzten betrachteten Index wurde ein Törnquist-Theil-Index berechnet, indem auf das in den Statistiken ausgewiesene Vorleistungsaggregat in konstanten Preisen zurückgegriffen wurde. Aus Übersicht 1 ist zu ersehen, daß die ausgewiesenen Unterschiede zwischen dem Index I und dem Index II Null sind[6)]. Dies ist auf die approximative Aggregationskonsistenz des Törnquist-Theil-Indexes zurückzuführen. Entsprechend den Ausführungen im theoretischen Teil sind auch die Unterschiede zwischen dem Index I und dem Index III in der Umgebung des Basisjahres zu vernachlässigen. Unterschiede zwischen diesen beiden Indices treten ledig-

4) Unter superlativen Indices versteht man Indexziffern, die die Veränderung flexibler Funktionsformen wiedergeben. Diese zeichnen sich dadurch aus, daß sie keine a priori Restriktionen bezüglich der Substitutionsbeziehungen zwischen den Faktoren unterstellen, da sie als Approximation zweiter Ordnung einer beliebigen linear homogenen Funktion angesehen werden können, vgl. DIEWERT (1976, S. 117).

5) Arbeit, Boden, Wirtschaftsgebäude, Ausrüstungsgüter, Vieh, Düngemittel, Pflanzenschutzmittel, Saatgut, Futtermittel und sonstige Vorleistungen. Eine Beschreibung des Datensatzes findet sich bei HOCKMANN.

6) Die Unterschiede waren so klein, daß sie durch Rundungen ausgeglichen wurden.

lich am Anfang und Ende des Untersuchungszeitraumes auf. Die Unterschiede sind jedoch so gering, daß sie in der empirischen Analyse, trotz der Verwendung des anscheinend aggregationskonsistenten Vorleistungsaggregates in konstanten Preisen, kaum ins Gewicht fallen.

Übersicht 1: Verschiedene Törnquist-Theil-Indices (TTI) des gesamten Inputs in der Landwirtschaft in der Bundesrepublik Deutschland, 1975-1984 (1980 = 1.0)

	Index 1	Index 2	Index 3
1975	0.927	0.927	0.931
1976	0.958	0.958	0.962
1977	0.980	0.980	0.963
1978	1.010	1.010	1.011
1979	1.010	1.010.	1.011
1980	1.000	1.000	1.000
1981	0.970	0.970	0.970
1982	0.076	0.976	0.976
1983	0.976	0.976	0.976
1984	0.953	β.953	0.954

Index 1: TTI, 10 Inputs

Index 2: TTI, 7 Inputs, Vorleistungsaggregat berechnet durch einen Törnquist-Theil-Index

Index 3: TTI, 7 Inputs, Vorleistungsaggregat in konstanten Preisen

3 Aggregationseffekte bei der Berechnung des Produktivitätswachstum mit Hilfe einer nichtparametrischen 'production frontier'

Die Definition des Produktivitätswachstums aus Abschnitt 2 wird hier dahingehend verallgemeinert, daß hierunter die Erhöhung der sektoralen Produktionsmöglichkeiten, beschrieben durch die sektorale Produktionsfunktion, verstanden wird. Für die Produktivitätsfortschritte gilt dann:

$$f^t(x) \geq f^{t-1}(x)$$

Die periodenspezifischen Produktionsfunktionen lassen sich dann mit Hilfe der linearen Programmierung berechnen[7].

$$f^t(x) = \max_{\beta_i \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^{t} y^i \beta_i \; : \; \sum_{i=1}^{t} \beta_i x^i \leq x, \; \sum_{i=1}^{t} \beta_i = 1 \right\}$$

Hierdurch werden die sektoralen Produktionsmöglichkeiten durch eine nichtparametrische 'production frontier' abgebildet. Die sektorale Produktionsfunktion ergibt sich dabei

7) Vgl. DIEWERT, (1981, S. 27 f. und 37 ff.). Dort ist auch die Erweiterung für einen Produktionsprozeß mit mehreren Inputs und Outputs wiedergegeben.

als eine Linearkombination der bis zum betrachteten Jahr tatsächlich stattgefundenen Produktionsprozesse.

Als Maß für die Produktivitätsentwicklung ergibt sich:

$$f^t\,(x^{t-1})/f^{t-1}\,(x^{t-1})$$

d.h. es wird die potentielle Erhöhung des Outputs in der Vorperiode, die mit den Produktionsmöglichkeiten der laufenden Periode und dem Faktorbestand der Vorperiode hätte erzeugt werden können, berechnet. Dies Maß wird später, mit verschiedenen Ausprägungen des Faktoreinsatzes, für die empirische Analyse der Aggregationseffekte herangezogen.

Im folgenden wird ein Test vorgestellt, der es erlaubt zu untersuchen, ob die Daten der Annahme der schwachen Separabilität genügen. Ausgegangen wird dabei von der Unterstellung vollkommener Märkte. Dabei stellt sich für die Akteure folgendes Entscheidungsproblem[8]:

(3.1) $$\max \left\{ p'v:\ g(x,A) \geq h \right\} \quad \text{mit}$$

v = Netput-Entscheidungsvektor
  $v > 0$ = Output
  $v < 0$ = Input
p = Vektor der mit v korrespondierenden Preise
$g(v,A)$ = Technologie, fallend und konkav in v, A = Technologieindex
h = Skalar[9]

Mit Hilfe der Lagrange-Optimierung und den Kuhn-Tucker-Bedingungen läßt sich zeigen, daß Multiplikatoren ß_t existieren müssen, die die folgenden Ungleichungen erfüllen.

(3.2) $h_t + p_t\,(v_t - v_s) - g(v_{s,}\ A_t) \geq 0,\ \ \text{ß} > 0$[10]

Diese Ungleichungen können dahingehend transferiert werden, daß sie für einen Test auf schwache Separabilität herangezogen werden können. Ausgegangen wird dabei von der Gleichung (2.1) und untersucht, ob eine Indexfunktion g^* besteht, die in dem zu aggregierenden Argumenten monoton steigen und konkav ist. Die zu aggregierenden Faktoren müssen dann folgender Bedingung genügen:

$$x_t = \operatorname{argmax} \left\{ p_t\,'x : g^*(x) > h_t \right\}$$

8) Die folgenden Ausführungen sind CHAVES und COX (S. 304 ff.) entnommen.
9) Hierbei kann es sich um einen fixen Output oder Input oder eine sonstige Restriktion handeln.
10) Vgl. CHAVAS und COX (S. 310).

Diese Funktion ist eine spezielle Form des Entscheidungsproblems (3.1). Das zu lösende Entscheidungsproblem lautet dann:

(3.3) $h_t - h_x + p_t (x_t - x_s)/ß_t > 0 \quad ß_t > 0$

wobei h_t und h_s beliebig gewählte Skalare darstellen.

Falls q den Vektor nicht beobachtbarer Variablen (h, 1/ß) für die T Beobachtungen darstellt, lassen sich die Ungleichungen (3.3) in Matrixform schreiben:

$A'q \geq 0$[11)]

Diese Bedingungen lassen sich mit Hilfe der linearen Programmierung berechnen. Dazu wird mit Hilfe eines beliebigen Vektors b eine Zielfunktion definiert.

$b'q \dashrightarrow \min$
Der Vektor b kann beliebig gewählt werden, da lediglich zu prüfen ist, ob die Opportunitätsmenge (ausgedrückt durch die Nebenbedingungen der linearen Programmierung) eine geschlossene konvexe Menge ist.

In der empirischen Analyse wird getestet, ob die Vorleistungen[12)] in Form eines Aggregats von den sonstigen Inputs zu separieren sind. Diese Forderung muß als erfüllt angesehen werden.

Bisher sind noch keine Aussagen über die Form der Aggregatbildung getroffen worden. Das hier verwendete Konstruktionsprinzip geht auf einen Vorschlag von VARIAN zurück. Ausgehend vom Hick'schen Aggregationskriterium - nachdem Güter aggregiert werden können, wenn sich die Preise der Güter proportional verändern - läßt sich ein Aggregat bilden, indem die Gütermengen mit den Preisen eines Basisjahres gewichtet werden. Dieses Konstruktionsprinzip entspricht aber der Verwendung des in den Statistiken ausgewiesenen Aggregats in konstanten Preisen.

Die Ergebnisse sind in Übersicht 2 wiedergegeben. Es wird deutlich, daß das Produktivitätswachstum, berechnet mit dem Vorleistungsaggregat, und die Veränderung, berechnet mit den einzelnen Vorleistungsgütern, zu ähnlichen Ergebnissen führen. Diese Ergebnisse rechtfertigen wiederum die Verwendung des in den Statistiken ausgewiesenen Vorleistungsaggregates in konstanten Preisen.

11) CHAVAS und COX (S. 305). Die Matrix A besteht dabei aus den entsprechenden Größen der Ungleichungen (3.3).
12) Zum Aussehen des Vorleistungsaggregates siehe Kap. 2.

Übersicht 2: Jährliche Wachstumsraten der totalen Faktorproduktivität (GFG), berechnet mit Hilfe einer nichtparametrischen 'production frontier' bei verschiedenen Aggregationsgraden für die Landwirtschaft der Bundesrepublik Deutschland, 1975-1984

	GFP 1	GFP 2
1975	1.000	1.000
1976	1.000	1.000
1977	1.021	1.021
1978	1.000	1.000
1979	1.000	1.000
1980	1.000	1.000
1981	1.021	1.021
1982	1.038	1.063
1983	1.000	1.000
1984	1.033	1.037

GFP 1: Produktivitätswachstum, Verwendung von 10 Inputs

GFP 2: Produktivitätswachstums, Verwendung eines Vorleistungsaggregats in konstanten Preisen

Literaturverzeichnis

BLACHORBY, C. und SCHWORM, W.: The Existence of Input and Output Aggregates in Aggregat Production Functions. - Econometrica 56 (1988), S. 613-643.

CHAMBERS, R.G.: Applied Production Analyses. - Cambridge 1988.

CHAVAS, J.-P. und COX, Th.L.: A Nonparametric Analysis of Agricultural Technology. - American Journal of Agricultural Economics, Vol. 70 (1988), S. 303-310.

DIEWERT, E.W.: Exact and Superlative Index Numbers. - Journal of Econometrics 4 (1976), S. 115-145.

DIEWERT, E.W.: Aggregation Problems in the Measurement of Capital. - In: Usher, D. (Hrsg.): The Measurement of Capital, 1980, S. 432-528. Ortsangabe?

DIEWERT, E.W.: The Theory of Total Factor Productivity Measurement in Regulated Industries. - In: Cowing, Th.G. und Stevenson, R.E. (Hrsg.): Productivity Measurement in Regulated Industries. New York 1981, S. 17-44.

HANAU, A. und RUSTEMEYER, R.C.: Der Produktivitätsbegriff - Definition, Messung und Anwendung. - Agrarwirtschaft 14 (1965), S. 3-11.

HOCKMANN, H.: Niveau und Entwicklung der Produktivität in der Landwirtschaft der Mitgliedsländer der EG und der Vereinigten Staaten von 1975-1984. - Berichte über Landwirtschaft 66 (1988), S. 393-415.

VARIAN, H.P.: The Nonparametric Approach to Production Analysis. - Econometrica 52 (1984), S. 579-597.